

# Trabajo Fin de Máster

## Máster en Sistemas de Energía Eléctrica

### Estimadores de Estado en Redes de Distribución: Revisión del Estado del Arte

Autora: M<sup>a</sup> Ángeles Gámiz Juárez

Tutores: Dña. Esther Romero Ramos

D. Antonio de la Villa Jaén.

**Dep. Ingeniería Eléctrica**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2016



Trabajo Fin de Máster  
Máster en Sistemas de Energía Eléctrica

# **Estimadores de Estado en Redes de Distribución: Revisión del Estado del Arte**

Autor:

M<sup>a</sup> de los Ángeles Gámiz Juárez

Tutores:

Dña. Esther Romero Ramos

D. Antonio de la Villa Jaén

Dep. Ingeniería Eléctrica

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2016

“A mi abuelo, Don José Gámiz Matas”

## AGRADECIMIENTOS

Hoy, seis años después de mi primer día en la Escuela, solo tengo palabras de agradecimiento y buenos recuerdos al haber alcanzado al fin este sueño.

Gracias a mi mentora y amiga Dña. Esther Romero Ramos. Eres especial como profesora, pero aún más como persona. Nunca podré agradecerte lo vivido estos años.

Gracias a Don Antonio de la Villa Jaén por ser el gran profesor que todo alumno en esta escuela querría tener.

Gracias a todos los profesores, en especial a los del Departamento de Ingeniería Eléctrica.

Soy muy afortunada por tener unos padres que me han proporcionado todo lo necesario para estudiar y alcanzar mis metas. El apoyo y la confianza que ellos y mi hermano me han mostrado día tras día durante toda mi vida son algo incalculable, y estoy enormemente agradecida por todo lo que han hecho por mí. Gracias por ser una vez más, partícipes de uno de los capítulos más importantes de mi vida.

Gracias a mis padrinos y demás familiares por amarme incondicionalmente y por interesarse por mí en cada momento. Este logro también es vuestro.

Gracias Alfonso, por ser tan especial y por dejarme compartir contigo mis sueños.

Gracias a los amigos que siempre estuvieron, a los de toda la vida, y gracias a los que vinieron, porque con ellos he sido muy feliz, y sé, que aunque pasen los años y estemos lejos, siempre estarán para mí como yo lo estaré para ellos.

## RESUMEN

La Estimación de Estado en Sistemas de Distribución está llegando a ser un elemento esencial de los sistemas de gestión de la distribución, sirviendo como base de numerosas aplicaciones dirigidas a las redes inteligentes o, también conocidas como SMART GRIDS. En este documento se va a tratar la evolución de este método desde su origen hasta la actualidad. Se describirán las distintas metodologías de resolución de esta problemática, se mostrarán las topologías existentes realizando una clasificación según las características propias de cada modelo de estimación que se presentarán en los puntos de este proyecto.

## ABSTRACT

State Estimation in Distribution Systems is becoming an essential element of many distribution management systems (DMS), serving as the basis for numerous applications targeting smart grids. This paper discusses the development of this method from its origins to today. The different methodologies of resolution of this problem will be described, existing topologies are shown performing a classification according to the characteristics of each estimation model to be presented at the points of this project features.

## Índice de Ilustraciones

Ilustración 1. Esquema de funcionamiento del estimador de estado .....	17
Ilustración 2.....	28
Ilustración 3.....	28
Ilustración 4.....	29
Ilustración 5.....	31
Ilustración 6.....	36
Ilustración 7. Sección de línea trifásica .....	66
Ilustración 8. Circuito equivalente de sección de línea trifásica .....	66
Ilustración 9. Modelo de línea.....	72
Ilustración 10. Circuito equivalente de una fase de un fragmento de línea .....	84
Ilustración 11. Diagrama ilustrativo sobre las medidas de inyección de potencia en un nudo k87	
Ilustración 12. Diagrama de línea para ilustrar las magnitudes de tensión.....	89
Ilustración 13. Estructura general de red de distribución radial.....	109

## Índice

AGRADECIMIENTOS.....	4
RESUMEN .....	5
ABSTRACT .....	6
Índice de Ilustraciones .....	7
1. Objetivos y Alcance del Proyecto .....	12
2. Estimador de Estado Convencional.....	15
2.1. Situación histórica .....	15
2.2. Características generales.....	16
2.3. Formulación del problema de estimación de estado.....	19
2.3.1. Modelo de la red. Tratamiento del sistema de medidas .....	20
2.4. Solución mediante las ecuaciones normales. ....	24
2.5. Principio de Observabilidad .....	27
2.5.1. Análisis numérico de observabilidad.....	31
2.5.2. Análisis topológico de observabilidad .....	33
2.6. Detección e identificación de medidas erróneas .....	34
2.6.1. Prefiltrado .....	35
2.6.2. Detección/Identificación .....	36
2.6.2.1. Clasificación de las medidas .....	38
2.6.2.2. Propiedades de los residuos de medidas .....	39
2.6.2.3. Detección de datos erróneos .....	40
Test $\chi^2$ para detección de medidas erróneas .....	40
2.6.2.4. Identificación de datos erróneos .....	40
Test del mayor residuo normalizado ( $rN$ ) .....	41
Datos erróneos múltiples .....	41
Identificación mediante Test de Hipótesis.....	42
3. Metodologías de resolución del Estimador de Estado.....	45
3.1. Introducción .....	45
3.2. Mínimos Cuadrados Ponderados .....	47
3.3. Ecuaciones Normales con Restricciones .....	50
3.4. Transformaciones Ortogonales .....	51
3.5. Método Híbrido .....	52
3.6. Método de la Matriz Aumentada de Hatchel.....	53
3.7. Método de Pseudoinversas.....	54



3.8.	Método de la Matriz Aumentada por Bloques .....	56
3.9.	Mínimos Absolutos.....	57
3.10.	Mínima Mediana de Cuadrados .....	59
3.11.	Conclusiones.....	60
4.	Evolución de los estimadores de estado en redes de distribución .....	63
4.1.	Estimador de estado con restricciones de igualdad .....	63
4.1.1.	Introducción .....	63
4.1.2.	Variables de Estado .....	64
4.1.3.	Formulación general: Ecuaciones normales con restricciones de igualdad.....	64
4.1.4.	Modelo de línea empleado .....	65
4.1.5.	Formulación del algoritmo .....	66
4.1.6.	Tratamiento de las medidas de inyección nulas .....	68
4.1.7.	Desacoplado rápido.....	69
4.2.	Estimador de estado basado en intensidades de rama (I) .....	70
4.2.1.	Introducción .....	70
4.2.2.	Formulación genérica del problema de estimación de estado .....	70
4.2.3.	Modelo de línea empleado .....	71
4.2.4.	Método de estimación basado en la tensión de los nudos.....	72
4.2.5.	Variables de estado .....	72
4.2.6.	Funciones de medidas $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ .....	73
4.2.7.	Método de estimación de estado basado en la Intensidad de rama .....	75
4.2.8.	Estimación de estado de redes débilmente malladas.....	77
4.3.	Estimador de estado basado en intensidades de rama (II) .....	78
4.3.1.	Introducción .....	78
4.3.2.	Modelo de estimación de estado basada en intensidades de rama.....	78
4.3.3.	Mejora del algoritmo de estimación .....	81
4.4.	Estimador de estado basado en intensidades de rama (III). Influencia de la localización de las medidas .....	83
4.4.1.	Introducción .....	83
4.4.2.	Modelo de línea empleado .....	84
4.4.3.	Variables de Estado .....	85
4.4.4.	Entradas de la matriz Jacobiana .....	85
4.4.5.	Método de estimación .....	90
4.4.6.	Influencia del emplazamiento de las medidas .....	91

4.5.	Estimador de estado basado en intensidades de rama (IV). Introducción de PMUs..	91
4.5.1.	Introducción .....	91
4.5.2.	Variables de estado .....	92
4.5.3.	Formulación empleada.....	93
4.5.4.	Fundamentos de esta metodología .....	95
4.5.5.	Pruebas y resultados realizados en la teoría estudiada .....	101
4.6.	Estimador de estado lineal.....	102
4.6.1.	Introducción .....	102
4.6.2.	Formulación lineal.....	103
4.6.3.	Formulación lineal trifásica .....	104
4.7.	Estimador de estado basado en el uso de una matriz de impedancia cuasi simétrica reducida.....	106
4.7.1.	Formulación completa .....	107
4.7.2.	Variables de estado .....	108
4.7.3.	Organización de los datos .....	109
4.7.4.	Cálculo de las restricciones .....	110
4.7.5.	Reducción de la red: de TRX a <b>TRXr</b> .....	111
4.7.6.	Formulación del estimador para sistemas débilmente mallados .....	112
5.	Conclusiones.....	115
	Referencias Bibliográficas .....	117

# **CAPÍTULO 1. OBJETIVOS Y ALCANCE DEL PROYECTO**

## 1. Objetivos y Alcance del Proyecto

El Estimador de Estado (SE en inglés) en los sistemas eléctricos ha sido una herramienta fundamental para los Sistemas de Control de la Energía Eléctrica desde 1970, concienciando de la necesidad de su existencia, sobre todo, a partir del incidente producido el 9 de noviembre de 1965 en el nordeste de Estados Unidos y norte de Canadá. Este incidente consistió en un apagón eléctrico que se produjo durante la hora punta en algunas partes de Canadá y varios estados de Estados Unidos y que se prolongó durante aproximadamente 13 horas afectando a más de 30 millones de personas en Nueva Jersey, Connecticut, Massachusetts, Rhode Island, New Hampshire, Vermont, Quebec y Ontario [1].

Este suceso hizo que las empresas eléctricas comenzaran a realizar un gran esfuerzo para desarrollar nuevas técnicas en la operación de los sistemas de potencia para que así permitieran un elevado nivel de seguridad en el servicio.

Entonces, comenzó a tener interés los temas relacionados con el análisis de seguridad, sus índices, la mejora relacionada con ella, el análisis de estabilidad, la optimización, la fiabilidad, ... etc, y hasta el momento, el control y la decisión de la operación se basaron en un sistema de supervisión que controlaba las posiciones de los interruptores en las subestaciones, y un sistema separado, generalmente análogo al anterior, que controlaba de manera automática la generación y el despacho económico. Por lo tanto, los únicos datos que el operador disponía en tiempo real eran el estado de los interruptores, la frecuencia del sistema y el conjunto de medidas de potencia necesarias para el control de la generación.

Teniendo en cuenta la situación existente, se puso especial interés en buscar metodologías y técnicas que aportaran la información en tiempo real o cada pocos segundos. La obtención en tiempo real de la información de los sistemas de potencia era más compleja de lo que parecía, debido sobre todo al deterioro de la información introducido por las pérdidas en los procesos de lectura, comunicación y recepción de esa información.

Se consideraba que teniendo conocimiento de todos estos datos era factible comprobar la seguridad del sistema de manera continua, analizando así las condiciones de operación de cada equipo de la red y detectando posibles situaciones anormales que pudieran surgir.

La captación, detección y señalización del sistema, junto con la utilización de pantallas que representaran los diferentes escenarios y el almacenamiento de los múltiples eventos, conformó el conocido Sistema de Supervisión del Control y Adquisición de Datos (SCADA en Inglés). Se pensó que con el SCADA actualizado se podría llevar el seguimiento y el control de la seguridad del sistema con sólo introducir las medidas en los programas de control, pero eso no era del todo cierto, ya que además del amplio

contenido de información sobre la red, se debían tener en cuenta las múltiples inconsistencias que podían producirse por los diversos errores en las medidas, poniéndose así de manifiesto la necesidad de un reparto de cargas en tiempo real.

Es por esto último que la estimación de estado es considerada una operación de reparto de cargas en tiempo real, asegurando con esto el inicio de la ejecución de las funciones de seguridad en los centros de control, y complementando al SCADA con lo que se denomina el Sistema de Gestión de Energía (EMS en inglés).

Inicialmente se puso poco interés en la estimación de sistemas de distribución, quedando confinada la SE a los sistemas de transporte, donde se concentraron la mayoría de los equipos de medida y donde los niveles de potencia demandaban medidas de seguridad más ajustadas. A posteriori sin embargo, se ha identificado la SE a un nivel de distribución, y gracias fundamentalmente al interés que han causado las redes inteligentes, la rápida evolución que se ha producido en la lectura automatizada de medidas (AMR en inglés), la infraestructura automatizada de las mismas (AMI en inglés), y el gran avance tecnológico en la computación. [2]

A todo lo mencionado, se suman las grandes diferencias existentes entre los sistemas eléctricos de transporte y de distribución. La estimación en redes de distribución ha resultado ser más complicada debido a las características propias de estas redes. Algunas de ellas son:

- Operación radial
- Existencia inherente de cargas desequilibradas y sistema trifásico desequilibrado
- Existencia de cargas distribuidas separadas por cortas distancias
- Conductores con alto ratio R/X
- Presencia de generación distribuida (DG en inglés) y generación no convencional
- Escasez de medidas en los conductores (baja redundancia)
- Líneas largas y cortas incidiendo en el mismo nudo

Todas estas características hacen que las técnicas de estimación para las redes de transporte no puedan ser aplicadas directamente sobre el sistema de distribución.

El objetivo de este documento es la recopilación de información sobre la estimación de estado en redes de distribución, analizando en primer lugar el estimador de estado convencional, profundizando en las diferentes metodologías de resolución de la estimación, y estudiando las diversas propuestas de modelos de estimación de estado que se han llevado a cabo en las últimas dos décadas.

# **CAPÍTULO 2. ESTIMADOR DE ESTADO CONVENCIONAL**

## 2. Estimador de Estado Convencional

### 2.1. Situación histórica

El concepto de Estimación de Estado fue introducido por Fred Schweppe, un ingeniero eléctrico, profesor del Massachusetts Institute of Technology (MIT). Schweppe definió la Estimación de Estado como un algoritmo de procesamiento de datos que convierte las medidas redundantes y otra información disponible en un estimado del estado del sistema eléctrico [2].

El Estimador de Estado es, básicamente, una herramienta utilizada por los centros de control de la energía eléctrica para la construcción, en tiempo real, del modelo eléctrico del sistema. Este modelo debe ser fiable sobre todo ante el funcionamiento de los mercados de energía. La importancia de la estimación del estado de los sistemas eléctricos ha creado la necesidad de nuevas metodologías de análisis que mejoran la fiabilidad y la precisión.

Cabe destacar que a lo largo de los años se han presentado múltiples restricciones que han hecho imposible tener una imagen perfecta del Sistema. En primer lugar, la presencia de restricciones económicas ha hecho que los instrumentos de medida no puedan ser instalados en cada lugar donde la información resultaría necesaria, así que los datos estarían incompletos. En segundo lugar, la naturaleza de los instrumentos de medida y los problemas de comunicación en la transmisión de los datos hacia el centro de control han provocado que los datos de las medidas estén inducidos a tener un cierto error, por lo que en definitiva, los datos podrían ser inexactos, irreales y presentar retrasos.

La estimación de estado resultó ser un camino efectivo para reducir estas preocupaciones, siendo su técnica un proceso de generación de las mejores estimaciones posibles de los valores reales del sistema empleando toda aquella información disponible.

Con el aumento del interés en la automatización de los sistemas de distribución, las medidas en tiempo real están cada vez más disponibles y pronto, la estimación de estado en los sistemas de distribución podría ser justificada completamente.

Así, monitorizando los sistemas en tiempo real, se haría que la estimación de estado pueda modelar todas las incógnitas existentes en los sistemas de distribución tales como, por ejemplo, el complicado sistema trifásico desequilibrado.

Sin embargo, en la predicción futura el número de medidas en los sistemas de distribución está limitado y podría no ser suficiente para la estimación de estado. Y es en este caso, cuando el uso de pseudomedidas y medidas virtuales podrían tener una gran importancia para lograr una buena estimación.

Se puede decir que la investigación sobre la estimación de estado en redes de distribución se inició hace poco más de dos décadas, y es ahora cuando más se está desarrollando. Además, la evolución tecnológica que se ha producido hasta ahora con la aparición de los contadores inteligentes (Smart Meters en inglés), el abaratamiento de la electrónica, los avances en estudios realizados para alcanzar una mejor estimación y el conocimiento en más profundidad sobre el comportamiento del sistema, llaman a la búsqueda de modelos que se van mejorando unos a otros.

Una de las principales razones para estudiar este tema es que se está intentando modernizar las redes de distribución considerando el mejor ratio de coste/beneficio. Además, podría ser necesario desarrollar estimadores específicos para los sistemas de distribución, con soluciones innovadoras para los estimadores de estado del futuro teniendo en cuenta los posibles avances tecnológicos que se irán produciendo.

## 2.2. Características generales

Los principales objetivos que busca el Estimador de Estado son:

- Monitorizar la operación del Sistema Eléctrico
- Obtener el estado del Sistema Eléctrico buscando que el resto de herramientas que operan en el sistema, puedan trabajar de manera óptima.

En general, el Estimador de Estado comprende básicamente las siguientes funciones principales [1]:

- 1) Prefiltrado de las medidas: se llevan a cabo un conjunto de comprobaciones rudimentarias para detectar y descartar mediciones que son claramente erróneas (magnitudes de tensión negativas, de rangos de los flujos de potencia, etc.).
- 2) Procesar la Topología de la Red: Sobre la base del estado de los dispositivos de conmutación y la disposición física de las subestaciones, la estructura del modelo eléctrico de red (nodos eléctricos, conectividad, islas energizadas, etc.).
- 3) Análisis de Observabilidad: determina si el estado del sistema se puede obtener usando las medidas disponibles para toda la red. Si sólo un subconjunto de nodos es observable, a continuación, se identifican las islas observables.
- 4) Estimación del Estado: Calcula el estado de la red estadísticamente óptima, o el estado que mejor adapte las medidas capturadas de forma remota para un conjunto dado de parámetros de red y conectividad de la misma. Como un subproducto, proporciona también las medidas estimadas y las matrices de covarianza asociadas.
- 5) Detección de errores: Sobre la base de ciertas propiedades estadísticas de la estimación, esta función detecta la presencia de posibles errores no gaussianos en el conjunto de medidas. Si la redundancia es adecuada, estas medidas no deseadas pueden identificarse y eliminarse. Los estimadores modernos



también son capaces de detectar errores de topología y la sospechosa estimación de valores mejorados de parámetros de la red, tales como las tomas de los transformadores.

Estas funciones pueden verse reflejadas en el esquema que se muestra en la Ilustración 1 [1]:



Ilustración 1. Esquema de funcionamiento del estimador de estado

La estimación de estado (SE) procesa un conjunto de medidas a estimar el estado del sistema de potencia existente. Hay tres tipos de conjuntos de medidas:

- 1) Telemedidas: toda lectura del consumo eléctrico realizada a distancia, es decir, sin tener que pasar a leer el contador físicamente. Son las que se obtienen en tiempo real desde las remotas de las subestaciones a través del SCADA. Los datos típicos que se incluyen son tensiones e inyecciones de activa y reactiva en los nudos y flujos de potencia activa y reactiva en las líneas (actuales PMUs).
- 2) Pseudomedidas: son valores obtenidos basándose en los datos históricos existentes por lo que tienen menos precisión que si fuesen medidos; por ejemplo, la potencia generada en las centrales o la demanda de las subestaciones.
- 3) Virtuales: Son aquellas que no requieren ser medidas, como por ejemplo la inyección nula en las subestaciones de transporte. La información de esa

medida aporta error nulo. La información de un cero podría ser utilizada en SE como una medida exacta que no necesita ser medida, pero cuya información está siempre disponible.

Para tratar con la inyección nula en las medidas, se emplean una serie de métodos como son [3]:

1. La eliminación directa de variables usando las igualdades asociadas a estas medidas exactas
2. La consideración de pesos altos en estas medidas exactas.
3. El método de los multiplicadores de Lagrange.

En la práctica, se observa que los datos telemididos contienen errores debido a la inexactitud de la calibración de los aparatos, el ruido existente en los canales de comunicación, el desequilibrio que hay entre las fases, etc. Pero esto no resulta un gran problema, ya que como se ha podido ver antes, el Estimador de Estado emplea un bloque de limpieza de errores debido a que las medidas están relacionadas entre sí mediante las leyes que gobiernan los circuitos eléctricos. Si existiera redundancia en el conjunto de medidas existente (mayor número de medidas de las necesarias para determinar la condición de la red), se podría emplear un procedimiento sistémico que corrigiera los errores.

La exactitud de las medidas no sólo dependerá del transformador de medida, sino también de los transductores y convertidores y se tendrá que considerar como error de las medidas un único valor que sea conjunción de la suma acumulativa de los errores en los dispositivos que intervienen en todo el proceso.

Los parámetros que determinan el nivel de exactitud de la medida son los siguientes [2]:

- Clase: Se considera el error máximo que el aparato de medida puede tener, tomando en tanto por ciento, con respecto al valor de fondo de escala o señal nominal de salida, en unas condiciones definidas por normas nacionales o internacionales.
- Linealidad: El error de linealidad es el error relativo en tanto por ciento, con respecto al valor de fondo de escala, es decir, ajustado de manera que a la entrada nominal le correspondiese exactamente la salida nominal.
- Reproducibilidad o Histéresis: El error de histéresis es el error que puede darse por diferencia de los valores obtenidos en un convertidor de medida a igualdad de condiciones ambientales, de temperatura, etc., pero repitiendo las medidas en condiciones dinámicas diferentes, es decir, aumentando la medida en un momento y disminuyéndola en otro momento.
- Derivada térmica: Es el error que puede producirse por variación de la temperatura en el medio ambiente en que se encuentra el instrumento de

medida, con respecto a la medida que tiene a una temperatura de referencia. Esta diferencia de valor que se toma también en tanto por ciento con respecto al fondo de escala, puede ser de cero, es decir, de la salida que da el aparato de medida para una entrada que por su ajuste debiera dar salida igual a cero, o bien puede ser de plena escala, es decir, de la salida que da el aparato de medida para la entrada nominal. Este error se suele dar en tanto por ciento por cada diez grados centígrados.

- Otros: Existen otros parámetros o magnitudes, tales como la frecuencia de red, tensión de alimentación, impedancia de carga, que pudieran tener algún pequeño efecto sobre el aparato de medida y sobre su precisión, por lo que en algunos de ellos se suele expresar la influencia de dichas magnitudes.

Destacar que la *clase* es el parámetro más influyente [2].

### 2.3. Formulación del problema de estimación de estado

El estado de un sistema de potencia se encuentra definido por un conjunto de fasores compuesto por las tensiones complejas de los nudos. Para un primer análisis general, se asume implícitamente que la topología y los parámetros de la red, son conocidos, por lo que no forman parte del estado.

El objetivo principal de lo que se conoce como estimación de estado estática es estimar las tensiones complejas en todos los nudos eléctricos de un sistema dado. Esto se consigue procesando las medidas que se encuentran disponibles y la información sobre el estado de algunos dispositivos instalados en el sistema objeto de estudio como son los interruptores, seccionadores y tomas de transformadores, así como los parámetros de líneas, bancos de condensadores, transformadores y reactancias.

El número de medidas, así como su ubicación, tipo y precisión dependen de cada sistema en concreto. Por motivos económicos, sólo los sistemas de transporte a muy alta tensión están dotados de un sistema de medidas completo y adecuado para la estimación de estado. En los niveles de distribución de mayor tensión y responsabilidad (antiguamente llamados de “reparto”) el sistema de medidas también permite llevar a cabo el proceso de estimación, aunque con ciertas limitaciones y consideraciones que se verán más adelante en este documento.

Los siguientes tipos de medidas son los más empleados en el problema de estimación:

1. Flujos: Flujos de potencia activa y reactiva medidos en ambos extremos de líneas y transformadores.
2. Inyecciones: Potencia neta activa y reactiva inyectada en los nudos. Estas inyecciones suelen ser a su vez flujos de potencia por elementos que caen fuera

- del ámbito del estimador, normalmente transformadores generación/ transporte o transporte/ distribución.
3. Módulos de tensiones: Lecturas de voltímetros en los embarrados. Pueden haber varias medidas en un mismo nudo eléctrico compuesto por varios embarrados acoplados por interruptores.
  4. Módulos de intensidades: Lecturas de amperímetros en ambos extremos de líneas y transformadores.

Cabe destacar que, por su propia naturaleza, los dos primeros tipos de medidas llevan consigo un determinado signo, mientras que los dos últimos tipos son siempre positivos (valores eficaces o rms) [2].

### 2.3.1. Modelo de la red. Tratamiento del sistema de medidas

El estimador de estado debe monitorizar la operación del sistema en funcionamiento normal mientras la carga y la generación varían lentamente. En esta situación, se puede suponer que el sistema se encuentra en un estado idílico cuasi-permanente y equilibrado (líneas perfectamente traspuestas), por lo que puede utilizarse un circuito monofásico equivalente de secuencia directa para formular el problema.

Dado el modelo de la red, las medidas existentes comentadas anteriormente pueden expresarse como funciones generalmente no lineales del estado del sistema. Estas expresiones no tienen en cuenta los posibles errores de las medidas, que deben modelarse como un término adicional.

Si se considera un vector  $z$  compuesto por  $m$  medidas, éstas pueden ser expresadas en función de las  $n$  componentes del vector de estado  $x$  como sigue a continuación ( $n = 2N - 1$ , siendo  $N$  el número de nudos):

$$z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ h_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix} = h(x) + e \quad (1)$$

donde :

$$h^T = [h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x)].$$

$h_1(x)$  es la función no lineal que relaciona la medida  $i$  con el vector de estado  $x$ .

$x^T = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  es el vector de estado.

$e^T = [e_1, e_2, \dots, e_m]$  es el vector de errores asignado a las medidas empleadas.

Como ocurre con el flujo de cargas, para trabajar con variables reales en lugar de complejas, cada fasor tensión se expresa en coordenadas polares (lo más común) o

cartesianas. Además, el vector de medidas está compuesto por términos reales correspondientes a flujos o inyecciones de potencia activa o reactiva, o magnitudes de tensiones y corrientes. En realidad, como se verá a continuación, en las funciones  $h_i(x)$  que relacionan el estado con las medidas sin errores aparecen también los parámetros y la topología de la red empleada, implícitos en dichas ecuaciones, pues según el modelo de la red que se considere, las ecuaciones serán de una manera u otra. Sin embargo, en base a la suposición de que estos datos se conocen perfectamente con total precisión, tan solo el vector de estado aparece en la dependencia funcional.

El estimador de estado convencional emplea coordenadas polares para las tensiones, y cartesianas para los elementos de la matriz de admitancias de nudos, de modo que las funciones  $h_i(x)$  relativas a las medidas de potencia son las siguientes:

- Medidas de inyección neta en el nudo  $i$ :

$$P_i = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (2)$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (3)$$

- Medidas de flujo a través de una línea o transformador del nudo  $i$  al  $j$ :

$$P_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) - G_{ij} V_i^2 \quad (4)$$

$$Q_{ij} = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + V_i^2 (B_{ij} - b_{ij}^p) \quad (5)$$

siendo  $V_i, V_j$  los módulos de las tensiones en los nudos  $i$  y  $j$  respectivamente.

$\theta_{ij} = \theta_i - \theta_j$  el desfase entre los nudos  $i$  y  $j$ .

$G_{ij} + B_{ij}$  el elemento  $i, j$  —ésimo de la matriz de admitancias de nudos.

$b_{ij}^p$  la admitancia paralelo del modelo en  $\pi$  de la línea que une  $i$  con  $j$ .

Las medidas de tensión tienen una gran relación con la variable de estado respectiva. Como se sabe, las medidas de intensidad no son frecuentes en redes de transporte pero sí pueden ser conocidas en las redes de distribución.

Resulta habitual, aunque no siempre justificable, hacer las siguientes suposiciones sobre las propiedades estadísticas de los errores de las medidas [1]:

- Los errores siguen una distribución normal.
- El valor esperado de todos los errores es nulo, es decir,  $E(e_i) = 0, i = 1, \dots, m$ .
- Los errores son independientes, es decir,  $E[e_i e_j] = 0$ .

Entonces,

$$\text{Cov}(e) = E[e \cdot e^T] = R = \text{diag}\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2\} \quad (6)$$

La desviación típica  $\sigma_i$  de cada medida  $i$  se calcula para reflejar la precisión esperada de los aparatos de medida involucrados.

Es importante destacar que el fundamento de la formulación del problema de estimación de estado está en el concepto de estimación de máxima verosimilitud, que se va a explicar muy brevemente a continuación.

El estimador de máxima verosimilitud de una variable aleatoria maximiza una función de probabilidad que se define en base a las hipótesis realizadas para el problema en cuestión. Así, las formulaciones basadas en hipótesis distintas darán resultados distintos. El desarrollo que sigue es el más común, y se basa en las hipótesis sobre los errores de medidas enunciadas anteriormente. La primera suposición es que los errores siguen una distribución normal si su función de densidad de probabilidad  $f(z)$  viene dada por:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (7)$$

donde

$z$ : variable aleatoria

$\mu$ : valor medio o esperado de  $z$ ,  $E(z)$

$\sigma$ : desviación típica de  $z$

Mediante la realización del cambio de variable que aparece a continuación, se obtiene una distribución normal estandarizada,  $\Phi(u)$ , con lo que solo es preciso considerar una única distribución normal.

Sea  $u = \frac{z-\mu}{\sigma}$ , entonces  $E(u) = 0, Var(u) = 1$ .

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (8)$$

La segunda suposición se incorpora fácilmente haciendo cero el valor esperado de los errores en las expresiones anteriores.

La tercera suposición implica que la función de probabilidad del conjunto de  $m$  medidas se obtiene simplemente tomando el producto de las funciones correspondientes a cada medida, es decir,

$$f_m(z) = f(z_1)f(z_2) \dots f(z_m). \quad (9)$$

Para simplificar la aritmética, se usa el logaritmo de dicha función, que se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \log f_m(z) &= \sum_{i=1}^m \log f_m(z_i) \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left( \frac{z_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 - \frac{m}{2} \log 2\pi - \sum_{i=1}^m \log \sigma_i. \end{aligned} \quad (10)$$

Se define el residuo como

$$r_i = z_i - E(z_i) \quad (11)$$

donde  $E(z_i) = h_i(x)$ , y  $h_i(x)$  es la función que relaciona el vector de estado  $x$  con las medidas.

Con la notación y variables anteriormente introducidas, el estimador de máxima verosimilitud puede formularse como el siguiente problema de optimización:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & J(x) = \sum_{i=1}^m W_{ii} r_i^2 \\ \text{sujeto a} \quad & z_i = h_i(x) + r_i, \quad i = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (12)$$

La solución de este problema se conoce como el Estimador de Mínimos Cuadrados Ponderados (WLS) de  $x$ . Hay que decir que este método de resolución para la estimación de estado empleado en el estimador convencional es el más utilizado, debido a que las variables estadísticas empleadas le permiten ser un método computacionalmente eficiente y que posee baja dificultad de implementación en comparación con otros métodos existentes.

Obsérvese que la función objetivo del problema de optimización anterior se deduce directamente de la elección de la función de probabilidad.

#### 2.4. Solución mediante las ecuaciones normales.

Como acabamos de ver, la estimación de estado cuando los errores en las medidas son independientes y siguen una distribución normal, consiste en resolver el problema de mínimos cuadrados dado por la Ecuación ( 12 ), cuya función objetivo se puede reescribir del modo:

$$\begin{aligned} J(x) &= [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{[z_i - h_i(x)]^2}{\sigma_i^2} \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $W = R^{-1}$ .

En el mínimo, deben cumplirse las  $n$  condiciones de optimalidad de primer orden, que en ese caso son

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow H^T(\hat{x})W[z - h(x)] = 0 \quad (14)$$

donde

$$H(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad (15)$$

es la matriz jacobiano del vector  $h(x)$ , de dimensión  $m \times n$ . Se trata de encontrar el valor  $\hat{x}$  que satisface la ecuación no lineal ( 14 ). Como ocurre con el problema del flujo de cargas, la forma más eficaz de resolver esta ecuación es mediante el método iterativo de Newton-Raphson (NR), que converge cuadráticamente a la solución. Si se desprecian los términos donde aparecen segundas derivadas de  $h(x)$ , el sistema lineal de  $n$  ecuaciones, denominadas ecuaciones normales, que debe resolverse en cada iteración es el siguiente:

$$G(x^k)\Delta x^k = H^T(x^k)W[z - h(x^k)] \quad (16)$$

donde  $x^k$  denota el valor de  $x$  en la iteración  $k$  – ésima y



$$G(x) = H^T(x)WH(x) \quad (17)$$

se conoce como matriz de ganancia.

Si  $H$  es de rango completo entonces la matriz simétrica  $G$  es definida positiva, y el sistema (16) tiene solución única. Una vez resuelto el sistema, el vector de estado debe actualizarse para la siguiente iteración:

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k. \quad (18)$$

Ignorando por simplicidad de notación la dependencia de  $H$  respecto a  $x$ , el procedimiento completo puede resumirse en los siguientes pasos:

1. Tomar perfil plano como valor inicial para  $x^0$  ( $V_i = 1$  p.u.  $\theta_i = 0$ ). Hacer  $k = 0$ .
2. Calcular los residuos  $\Delta z^k = z - h(x^k)$ .
3. Obtener  $H$  y calcular  $G = H^TWH$ .
4. Resolver el sistema

$$G\Delta x^k = H^TW\Delta z^k \quad (19)$$

aprovechando la estructura dispersa de  $H$  y  $G$ . Para ello se realiza la ordenación óptima de las filas de  $G$  (esto es sólo necesario la primera vez) y se lleva a cabo su descomposición triangular  $G=U^TU$ , seguido de los procesos de eliminación hacia delante y sustitución hacia atrás.

5. Actualizar el vector de estado  $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$  y hacer  $k = k + 1$ .
6. Si alguno de los elementos de  $\Delta x$  es mayor que una determinada tolerancia, volver al paso 2. En caso contrario, o si  $k$  excede un valor prefijado, detener el proceso.

Los términos del Jacobiano correspondientes a medidas de flujo e inyección se plantean a continuación (los términos debidos a medidas de tensión son todos nulos excepto el de la columna que corresponde a la tensión de medida que vale 1).

A continuación se presentan los distintos elementos que conformarían la matriz Jacobiana  $H$  si se consideran como variables de estado las tensiones y las fases de las tensiones en los nudos de la red:

- Inyección

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + V_i G_{ii} \quad (20)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (21)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = \sum_{j=1}^N V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) - V_i B_{ii} \quad (22)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (23)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (-G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij}) + V_i^2 B_{ii} \quad (24)$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \theta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} + B_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (25)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_i} = \sum_{j=1}^N V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + V_i^2 G_{ii} \quad (26)$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \theta_j} = -V_i V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (27)$$

- Flujo:

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} = V_j (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) + 2G_{ij} V_i \quad (28)$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \cos \theta_{ij} + B_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (29)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} = V_j (G_{ij} \sin \theta_{ij} - B_{ij} \cos \theta_{ij}) + V_i (B_{ij} + b_{ij}^p) \quad (30)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} = V_i(G_{ij}\sin\theta_{ij} - B_{ij}\cos\theta_{ij}) \quad (31)$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_i} = V_i V_j (-G_{ij}\sin\theta_{ij} + B_{ij}\cos\theta_{ij}) \quad (32)$$

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} = V_i V_j (G_{ij}\sin\theta_{ij} + B_{ij}\cos\theta_{ij}) \quad (33)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_i} = V_i V_j (G_{ij}\cos\theta_{ij} + B_{ij}\sin\theta_{ij}) \quad (34)$$

$$\frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} = -V_i V_j (G_{ij}\cos\theta_{ij} + B_{ij}\sin\theta_{ij}) \quad (35)$$

## 2.5. Principio de Observabilidad

El Principio de Observabilidad consiste en analizar el conjunto de medidas disponibles de forma que se puedan definir las zonas de la red donde se asegura el cálculo del estado estimado. Es decir, en el supuesto de que el sistema no sea observable se debe determinar qué zonas del sistema son observables e incorporar pseudomedidas que conviertan al sistema en observable.

Ante el estudio de observabilidad de un sistema, se pueden dar los siguientes casos:

- Red observable sin redundancia:  
El número de medidas linealmente Independientes sea igual al número de variables de estado (todas las medidas son críticas).
- Red observable con redundancia:  
El número de medidas linealmente Independientes sea mayor que el número de variables de estado.
- Red no observable:  
El número de medidas linealmente Independientes sea menor que el número de variables de estado.

Para ver las situaciones en las que se podría enmarcar este análisis, se define como isla física a una parte eléctricamente conectada de la red que se encuentra energizada. Esto se puede visualizar en la Ilustración 2. Cada isla física requiere de un análisis de

observabilidad independiente y de un nudo con referencia de fases. Se determinan en el procesador observable.

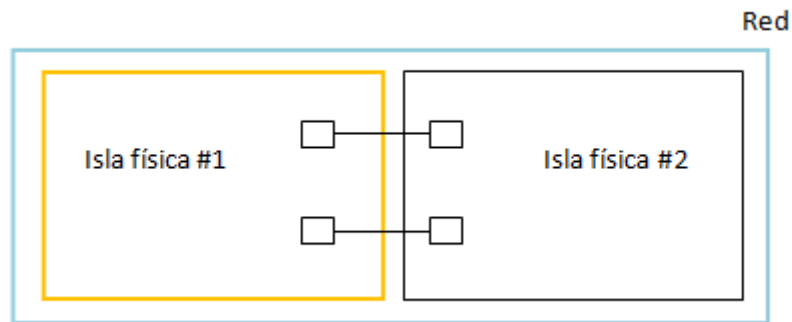


Ilustración 2

Se define como isla observable una isla para la cual todos los flujos de potencia son calculables a partir de las medidas disponibles, independientemente del valor adoptado para la referencia de fases. Esto se puede visualizar en la Ilustración 3.

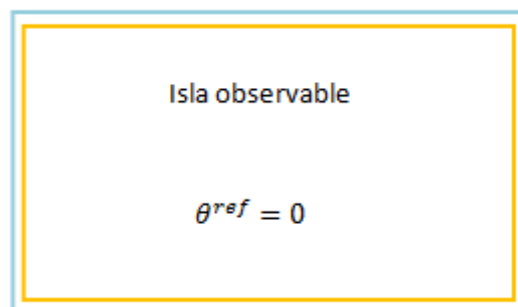


Ilustración 3

Si una isla física es observable con las medidas disponibles, directamente se puede desarrollar el proceso de estimación de estado.

Para el caso en que la isla sea observable, contando exclusivamente con las medidas disponibles, cada isla observable requiere de una referencia de fase como se muestra en la Ilustración 4. Las islas observables se encuentran unidas con líneas o transformadores cuyos flujos no son observables.

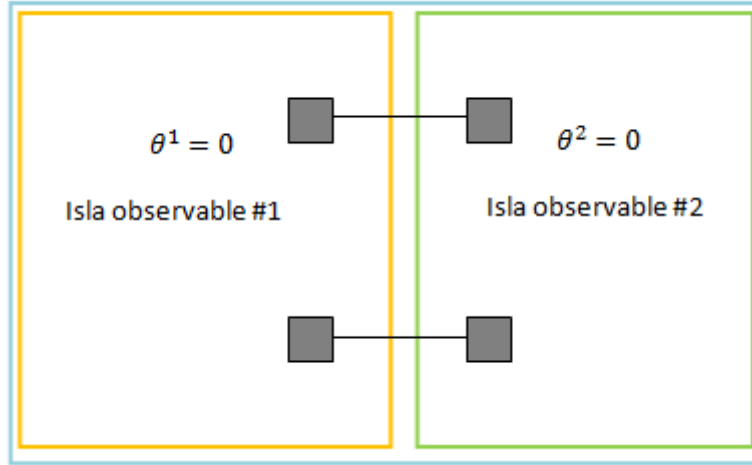


Ilustración 4

Formalmente, dadas las  $m$  medidas del vector  $z$ , el estimador trata de encontrar la mejor solución posible para los  $n$  elementos del vector  $x$ . Para poder obtener  $x$ , la condición necesaria es que se cumpla la desigualdad  $m \geq n$  [1]. Por tanto, hay que analizar el conjunto de medidas para asegurarse de que contiene al menos  $n$  medidas linealmente independientes, antes de realizar la estimación. Este análisis se conoce como test de observabilidad. El objetivo principal es chequear si puede estimarse el estado de todo el sistema en base a las medidas disponibles. Si el test falla, el análisis continúa para identificar todas las islas observables, que son aquellas partes de la red cuyo estado puede ser estimado independientemente de las demás tomando el ángulo de uno de sus nudos como origen de fases. Como se ha comentado ya, en estas islas es posible calcular cualquier magnitud interior, sea tensión, flujo o inyección de potencia. Las islas observables están conectadas unas con otras por ramas no observables, cuyos flujos no pueden estimarse con las medidas disponibles.

El análisis de observabilidad puede describirse formalmente considerando el siguiente modelo de medidas linealizado [1]:

$$\Delta z = H\Delta x + e \quad (36)$$

La estimación WLS,  $\Delta \hat{x}$  se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$\Delta \hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \Delta z. \quad (37)$$

Se puede calcular una solución única para  $\Delta x$  si  $(H^T R^{-1} H)$  es no singular o, lo que es lo mismo, si  $H$  es de rango completo ( $\text{rango}[H] = n$ ).

La teoría muestra la existencia de un acoplamiento débil entre las medidas de potencia activa y las tensiones, y entre las medidas de potencia reactiva y los desfases, de manera que el modelo linealizado anterior se puede desacoplar como se muestra en las ecuaciones ( 38 ) y ( 39 ):

$$\Delta z_a = H_{aa}\Delta\theta + e_a \quad ( 38 )$$

$$\Delta z_r = H_{rr}\Delta V + e_r \quad ( 39 )$$

donde según [1]

$z_a, z_r$  son las medidas de potencia activa y reactiva.

$H_{aa}$  es la submatriz de  $H$  cuyas filas y columnas corresponden a las medidas de potencia activa y ángulos de fase respectivamente.

$H_{rr}$  es la submatriz de  $H$  cuyas filas y columnas corresponden a las medidas de potencia reactiva y módulos de tensiones respectivamente.

A partir de los modelos desacoplados anteriores, la observabilidad  $P - \theta$  y  $Q - V$  se puede analizar de forma separada. En la realidad, todas las medidas de potencia, sean flujos o inyecciones, incluyen activa y reactiva simultáneamente, por lo que solo es preciso estudiar la observabilidad del modelo  $P - \theta$ . Tras este análisis, es suficiente con comprobar que cada isla obtenida con dicho modelo tiene al menos una medida de tensión para que sea declarada una isla observable.

El último paso del análisis de observabilidad es la determinación del número de pseudomedidas necesarias, y la ubicación de las mismas, en aquellos casos en que la red sea declarada como no observable con las medidas existentes.

Las pseudomedidas se emplean en redes no observables y son medidas introducidas artificialmente (datos históricos) que permiten hacer observable una agrupación de islas observables (Ilustración 5).

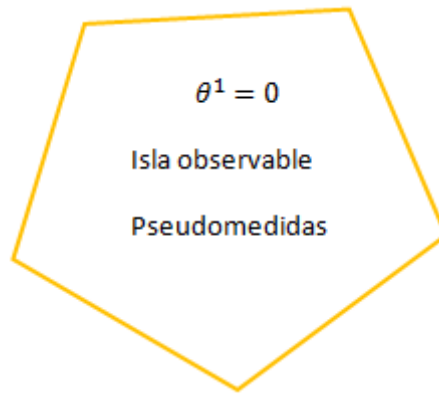


Ilustración 5

El módulo de observabilidad especifica las pseudomedidas que es necesario incorporar. Esta información adicional procede de las predicciones existentes de la demanda, generación programada con antelación a otras fuentes, y debe ser la última posible que haga observable al sistema, para no contaminar a las medidas reales.

El análisis de observabilidad puede hacerse por métodos numéricos y topológicos.

A continuación se van a presentar los diferentes tipos de metodologías para estudiar la observabilidad:

- Métodos numéricos: Analizan las características de las matrices implicadas en la resolución del problema. Pueden presentar problemas numéricos por errores de truncamiento.
- Métodos topológicos: Emplean la teoría de grafos. Evitan los problemas numéricos. Tienen carácter combinatorio.

### 2.5.1. Análisis numérico de observabilidad

El tipo y la localización de las medidas determinan la observabilidad de una red. Sin embargo, el punto de operación del sistema, y los parámetros de sus componentes, no afectarán a la observabilidad, salvo en algunos casos degenerados, de interés meramente teórico, que ocasionan cancelaciones numéricas en los coeficientes del Jacobiano.

Así, el análisis se simplifica suponiendo elementos artificiales cuya impedancia valga  $1.0j \text{ p.u.}$  y tensiones cuya magnitud sea  $1.0 \text{ p.u.}$

Con este modelo, similar al modelo en continua del flujo de cargas, los flujos de potencia por las ramas se expresan como:

$$P_b = C\theta \quad (40)$$

donde:

$P_b$  es el vector de flujos de potencia activa en continua por las ramas.

$C$  es la matriz de incidencias ramas-nudos reducida (excluyendo el nudo de referencia).

$\theta$  es el vector de ángulos de fase de las tensiones de nudos.

La observabilidad numérica se basa en la observación de que si todas las medidas son nulas, todos los flujos por las ramas deben ser nulos en la red observable (40,41). Si algún flujo no es nulo, entonces la rama correspondiente no es observable. Este requisito puede comprobarse fácilmente con el modelo desacoplado activo en continua

$$H_{aa}\theta = z_a \quad (41)$$

Cuya solución WLS,  $\hat{\theta}$ , viene dada por:

$$\hat{\theta} = (H_{aa}^T H_{aa})^{-1} H_{aa}^T z_a \quad (42)$$

Tomando un vector  $z_a$  nulo, la estimación  $\hat{\theta}$  deberá conducir, si  $H_{aa}$  es de rango completo, a flujos estimados nulos, es decir,  $P_b = C \hat{\theta} = 0$ .

Si  $H_{aa}\hat{\theta} = 0$ , pero  $P_b = C\hat{\theta} \neq 0$ , entonces  $\hat{\theta}$  se denomina estado no observable.

Las ramas  $i$ , con  $P_b(i) \neq 0$ , serán las mismas ramas no observables del sistema. Estas ramas dividen al sistema completo en islas observables.

Si una rama no tiene medidas incidentes (flujos o inyecciones en los extremos), entonces el estado estimado es independiente de los parámetros de dicha rama y de su estado (desconectada o en servicio). Por tanto, tales ramas pueden ignorarse en el análisis de observabilidad (ramas irrelevantes).

Entonces, se considera de nuevo el modelo desacoplado linealizado:

$$(H_{aa}^T H_{aa})\hat{\theta} = 0 \quad (43)$$

$$G_{aa}\hat{\theta} = 0. \quad (44)$$



Si  $G_{aa}$  no es singular, el sistema será completamente observable, sin embargo, si  $G_{aa}$  es singular, entonces las filas y columnas de la matriz pueden permutarse y reagruparse como sigue:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_a \\ \hat{\theta}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

donde  $G_{11}$  es la submatriz no singular de  $G_{aa}$ . Asignando valores arbitrarios pero diferentes  $\bar{\theta}_b$  a los elementos de  $\hat{\theta}_b$ , obteniendo una de las infinitas soluciones posibles para  $\hat{\theta}_a$ :

$$\hat{\theta}_a = -G_{11}^{-1}G_{12}\bar{\theta}_b \quad (46)$$

Los flujos por las ramas correspondientes a esta solución  $(\hat{\theta}_a\bar{\theta}_b) = \hat{\theta}^*$  pueden obtenerse de:

$$C\hat{\theta}^* = P_b^* \quad (47)$$

Aquellas ramas  $i$  con  $P_b^*(i) \neq 0$  serán identificadas como no observables.

El algoritmo de análisis numérico de observabilidad está compuesto por los siguientes pasos:

1. Las ramas que no tienen medidas adyacentes (flujo o inyección en sus extremos) son no observables y deben ser eliminadas. Son ramas irrelevantes cuyos parámetros no intervienen en el proceso de estimación.
2. Formar la matriz de ganancia y triangulizar.
3. Eliminar todas las medidas de inyección incidentes en nudos extremos de ramas no-observables.
4. Obtener las ramas no observables y eliminarlas.
5. Volver al paso 1 si se han eliminado ramas en el paso 4.

### 2.5.2. Análisis topológico de observabilidad

Puede mostrarse que existe una correspondencia biunívoca entre un conjunto de  $n$  columnas linealmente independientes de la matriz de coeficientes, y un árbol del grafo de la red formado por asignación de medidas a ramas. Dicha asignación se realiza mediante las siguientes reglas:

- Una medida de flujo se asigna a la propia rama cuyo flujo se mide.

- Una medida de inyección se asigna a alguna de las ramas incidentes al nudo cuya inyección se mide.
- Una rama solo puede asociarse a una única medida.

En base a las reglas anteriormente mostradas se pueden desarrollar distintos procedimientos heurísticos para construir progresivamente un árbol maximal cuyas ramas llevan asociadas medidas distintas.

Los pasos básicos del proceso son los siguientes:

1. En primer lugar, asignar las medidas de flujo a sus ramas respectivas. Esto da lugar a varias “islas de flujo” desconexas entre sí que constituyen los fragmentos iniciales del árbol que se están buscando (en el hipotético caso de que existiese una sola isla de flujo que abarcase toda la red, esta sería observable incluso sin medidas de inyección). Los flujos que en esta fase den lugar a bucles son redundantes.
2. Asignar las medidas de inyección a sus ramas en una secuencia arbitraria. El objetivo es que esta nueva rama haga crecer uno de los fragmentos de árbol o bien que interconecte dos de ellos de forma que constituyan uno solo. Una asignación inadecuada de estas medidas puede obligar después de deshacer parte del árbol para construirlo de otro modo. Si no hay forma de conseguir que una inyección haga crecer los fragmentos del árbol, esta será declarada como redundante e ignorada en lo sucesivo.

Si, una vez procesadas todas las medidas, se consigue un árbol conexo que incluya todos los nudos, la red es completamente observable. En otro caso, hay que identificar las islas observables, lo cual se consigue con un proceso iterativo de la siguiente forma:

1. Descartar las inyecciones que tienen al menos una rama incidente sin asignar cuyos nudos extremos pertenezcan a fragmentos de árbol distintos (es decir, que no formen bucle en un mismo subárbol). Estas inyecciones no pueden ser utilizadas por el estimador, al relacionar variables de estado de islas distintas.
2. Actualizar los subárboles eliminando las ramas afectadas y repetir el paso 1 hasta que no se quiten más inyecciones.

## **2.6. Detección e identificación de medidas erróneas**

La precisión y fiabilidad del estimador de estado depende de las telemedidas recibidas en el centro de control para su posterior procesado. A los errores asociados a los dispositivos de medida, analógicos o digitales, se suman también los originados en los canales de comunicaciones. Hay casos en los que, tras una labor de mantenimiento o reparación en la subestación, las conexiones de un medidor, o su calibración, pueden cambiarse inadvertidamente sin que exista constancia en el centro de control. Este

tipo de incidentes ocurren rutinariamente en la operación de los sistemas de potencia y generan un conjunto de medidas contaminado por datos incorrectos. A menos que estos datos erróneos sean detectados e identificados, el estado estimado en base a tales conjuntos de medidas será localmente deficiente.

Los estimadores de estado disponen de filtros previos que descartan inconsistencias obvias en el conjunto de medidas, sobre todo signos cambiados o valores fuera de rango. Sin embargo, muchos errores no gaussianos escapan a este filtrado [1].

El estimador de mínimos cuadrados ponderados, que a su vez, es de los más utilizados como se argumentará en el siguiente capítulo, utiliza procedimientos que se ejecutan tras la estimación, basados en los residuos de las medidas, para detectar e identificar datos erróneos. Otros tipos de estimadores intentan eliminar dichos errores durante el proceso de estimación.

El modelo empleado para las medidas es  $z_i^{med} = z_i^{exac} + \varepsilon_i$ .

El error de una medida sigue una distribución normal de media nula y desviación típica de  $\sigma_i$ .

En entornos reales el valor exacto no es posible conocerlo. Como valor exacto se adopta el valor estimado de la medida.

Los tipos de errores analógicos según su magnitud son:

1. Errores normales ( $<3\sigma$ )  $\Rightarrow$  RUIDO. No es necesario adoptar acciones correctoras.
2. Errores extremos ( $>20\sigma$ )  $\Rightarrow$  PREFILTADO
3. Errores grandes ( $3... 20\sigma$ )  $\Rightarrow$  DETECCIÓN/IDENTIFICACIÓN. Es necesario adoptar acciones correctoras.

### 2.6.1. Prefiltrado

Con el prefiltrado se evalúan errores en medidas antes del proceso de estimación, siendo identificados los errores directamente a partir del valor de la medida. Los ejemplos que se pueden poner al respecto serían:

- Tensiones nulas.
- Intensidades negativas.
- Consumos en instalaciones generadoras.
- Generación en instalaciones consumidoras.
- Coherencia en potencias en los extremos de líneas o transformadores (solamente con posibles pérdidas).

Algunos estimadores utilizan técnicas elaboradas para detectar este tipo de errores. Además, es posible implementar un proceso de estimación con modelos lineales aproximados de la red.

Las ventajas del prefiltrado son:

- Menor tiempo utilizado en la eliminación que en fases posteriores empleando el estado estimado.
- Mejora la convergencia.

### 2.6.2. Detección/Identificación

Cuando se realiza el análisis de medidas erróneas de Detección/Identificación se siguen una serie de etapas que son las que se muestran a continuación en la siguiente ilustración:

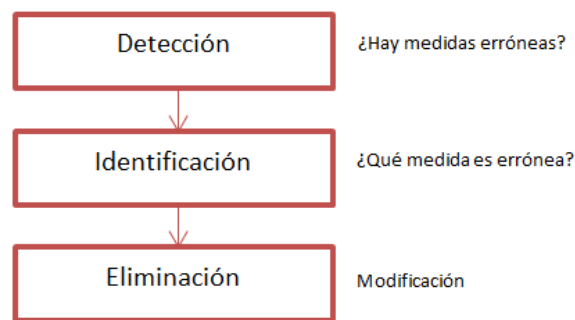


Ilustración 6

La detección e identificación de medidas erróneas requiere redundancia que puede ser:

- Global:  $(m/n)$  (medidas/estados)

Siendo  $m$  el número de medidas y  $n$  el número de estados.

- Local (proximidades de la medida errónea)

Tener en cuenta que los errores en las medidas críticas no son detectables.

En el análisis de las medidas erróneas, la información disponible es el valor de las medidas  $z$ , el estado estimado  $\hat{x}$ , las medidas estimadas  $\hat{z} = \hat{z}(\hat{x})$ , el residuo de las medidas  $r = z - \hat{z}$  y las desviaciones típicas de las medidas  $\sigma$ .

Los residuos de las medidas en términos absolutos no son un buen indicativo de análisis de medidas erróneas.

La detección es posible realizarla mediante las propiedades estadísticas de la función de error:

$$J(\hat{x}) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i^2}{\sigma_i^2} \quad (48)$$

donde:

- el valor de la medida i-ésima es:  $z_i$
- la medida i-ésima estimada es:  $\hat{z} = \hat{z}(\hat{x})$
- el residuo de la medida i-ésima es:  $r_i = z_i - \hat{z}_i$
- la varianza de la medida i-ésima es:  $\sigma_i^2$

Esta función sigue una distribución Chi-cuadrado con  $m-n$  grados de libertad, obteniéndose el valor correspondiente a una probabilidad  $p$  (por ejemplo 95%) en una distribución Chi-cuadrado con  $m - n$  grados de libertad:

$$x_{m-n,p}^2. \quad (49)$$

Se realiza un test de hipótesis. Si  $J(\hat{x}) \geq x_{m-n,p}^2$  entonces hay medidas erróneas.

En la identificación de medidas erróneas, según sea el criterio seleccionado para comparar el orden de magnitud el residuo se diferencian dos tipos de residuos:

- A. Residuos Ponderados: son aquellos que utilizan la calidad (desviación típica) de las medidas.

Comparan el residuo con la calidad de la medida:

$$r_i^w = \frac{|z_i - \hat{z}_i|}{\sigma_i} = \frac{|r_i|}{\sigma_i}. \quad (50)$$

Sus ventajas son las siguientes:

- Su cálculo no conlleva elevados tiempos de computación.
- Criterio empleado en Estimador de Huber.

Entre sus inconvenientes el más relevante es que no se compara el residuo con su propia desviación típica.

- B. Residuos Normalizados: son los que emplean la calidad (desviación típica) de los residuos.

Con los residuos normalizados, la identificación es posible realizarla mediante las propiedades estadísticas de los residuos

$$r = z - \hat{z} \quad (51)$$

Las propiedades serían:

- Valor medio nulo:  $E(r) = 0$ .
- Covarianzas:  $cov(r) = cov(z) - cov(\hat{z})$ . La matriz de covarianzas se formula a partir de un conjunto de  $n$  variables aleatorias  $x_1, \dots, x_n$ , y mide la relación entre las variables aleatorias. A continuación se muestra un ejemplo de cómo sería una matriz de covarianzas:

$$\begin{matrix} x_i \\ x_j \end{matrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \dots & \\ \vdots & \ddots & \\ & & \sigma_{ii}^2 & cov_{ij} \\ & & cov_{ij} & \sigma_{jj}^2 \end{bmatrix}$$

$x_i \quad x_j$

Es una matriz cuadrada y simétrica. El elemento de la diagonal es la varianza de cada variable  $\sigma_i^2$ , y si es una matriz diagonal, las variables aleatorias son independientes.

La función que define al residuo normalizado es la que aparece a continuación:

$$r_i^N = \frac{z_i - \hat{z}_i}{\sqrt{R_r(i, i)}} \quad (52)$$

donde el residuo de la medida es  $z_i - \hat{z}_i$

Raíz del elemento correspondiente de la diagonal de la matriz de covarianzas de los residuos:  $\sqrt{R_r(i, i)}$ .

### 2.6.2.1. Clasificación de las medidas

A partir de las medidas obtenidas, se puede realizar una clasificación, diferenciando entre:

- Medida crítica: Aquella cuya eliminación del conjunto de medidas hace al sistema no observable.

La fila/columna correspondiente de la matriz de sensibilidad es nula.

Su residuo es siempre nulo, por este motivo no es posible detectar un error.

- Medida no crítica: Solamente en este tipo es posible detectar un error. No es una condición suficiente.

### 2.6.2.2. Propiedades de los residuos de medidas

Considérese la estimación obtenida con el modelo WLS linealizado,

$$\Delta \hat{x} = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \Delta z \quad (53)$$

Y el valor estimado  $\Delta \hat{z}$ :

$$\Delta \hat{z} = H \Delta \hat{x} = K \Delta z \quad (54)$$

donde  $K = H(H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1}$ .

Los residuos de las medidas pueden expresarse en términos de los errores de las medidas como sigue:

$$\begin{aligned} r &= \Delta z - \Delta \hat{z} \\ &= (I - K) \Delta z \\ &= (I - K)(H \Delta x + e) \text{ [Se cumple que } KH = H] \\ &= (I - K)e \\ &= Se \end{aligned} \quad (55)$$

denominando a la matriz  $S$ , matriz de sensibilidad residual.

Suponiendo que la matriz de covarianzas de los errores de medidas,  $R$ , se conoce, la matriz de covarianzas de los residuos  $\Omega$  puede expresarse como se indica:

$$\begin{aligned} E[rr^T] &= \Omega = S \cdot E[ee^T] \cdot S^T \\ &= SRS^T \\ &= SR \end{aligned} \quad (56)$$

La distribución del error de las medidas se supone normal con medida nula y matriz de covarianzas diagonal  $R$ , y se denota por:

$$e \sim N(0, R).$$

Además, la distribución de los errores de los residuos será también normal, con los siguientes parámetros:

$$r \sim N(0, \Omega)$$

### 2.6.2.3. Detección de datos erróneos

Como se ha indicado anteriormente, los residuos pueden usarse para decidir si debe o no sospecharse la existencia de datos erróneos en el conjunto de medidas. Para ello se emplearán dos test: el test  $\chi^2$  y el test del mayor residuo normalizado ( $r^N$ ). Mientras que el primero es estrictamente un test de detección, el segundo sirve también para identificar el dato erróneo.

### Test $\chi^2$ para detección de medidas erróneas

La suma de cuadrados de variables aleatorias independientes con distribución normal sigue una distribución  $\chi^2$ . Considérese la función objetivo del estimador WLS dada por la ecuación (12). Puesto que los residuos de las medidas siguen una distribución normal por las hipótesis realizadas, puede mostrarse que la función objetivo obedece a una distribución  $\chi^2$  con  $m-n$  grados de libertad.

El test  $\chi^2$  se realiza como sigue:

- Resolver el estimador WLS y calcular la función objetivo  $J(\hat{x})$ , donde  $\hat{x}$  es el estado estimado.
- Buscar en la tabla de distribución  $\chi^2$  para  $m-n$  grados de libertad el valor correspondiente a la probabilidad  $p$  (por ejemplo 95%). Sea  $\chi^2_{(m-n),p}$  este valor, donde  $p = \Pr(J(\hat{x}) \leq \chi^2_{(m-n),p})$ .
- Comprobar si  $J(\hat{x}) \geq \chi^2_{(m-n),p}$ . Si la respuesta es afirmativa, se concluye que hay algún dato erróneo. En caso contrario, las medidas no son sospechosas de contener tales errores.

### 2.6.2.4. Identificación de datos erróneos

La identificación de datos erróneos se refiere a la selección de la medida incorrecta de entre el conjunto de medidas, cuando se sospecha que existen tales datos. Los dos métodos de identificación revisados en este texto son los siguientes:



- Test de residuos normalizados  $r^N$ , que es fácil de implantar y funciona satisfactoriamente, a menos que haya ciertas combinaciones de datos erróneos múltiples.
- Identificación mediante test de hipótesis, que es más complicado pero más fiable que el test  $r^N$ .

A continuación, se revisan detalladamente ambos métodos.

### Test del mayor residuo normalizado ( $r^N$ )

Normalizando el residuo de medida se obtiene:

$$r_i^N = \frac{r^i}{\sqrt{\Omega_{ii}}} = \frac{r^i}{\sqrt{R_{ii}S_{ii}}} \quad (57)$$

Por tanto, los residuos normalizados  $r_i^N$  son  $N(0,1)$ . Puede demostrarse que si hay una sola medida errónea no crítica el mayor residuo normalizado corresponde precisamente a esa medida [1]. Además, este resultado se aplica a múltiples medidas erróneas siempre que la interacción entre las mismas sea despreciable. Los pasos del test de residuos normalizados para detectar e identificar errores simples o múltiples sin interacción son los que se describen:

1. Resolver el estimador WLS y obtener los elementos del vector de residuos:

$$r_i = z^i - h_i(\hat{x}), \quad i = 1, \dots, m \quad (58)$$

2. Calcular los residuos normalizados:

$$r_i^N = \frac{|r_i|}{\sqrt{\Omega_{ii}}} \quad i = 1, \dots, m \quad (59)$$

3. Encontrar el mayor residuo normalizado  $r_k^N$
4. Si  $r_k^N > 3$ , entonces la medida k-ésima se considera errónea. En caso contrario, parar (no existen medidas erróneas).
5. Eliminar la medida sospechosa de los datos de entrada y volver al paso 1.

### Datos erróneos múltiples

Como ya se ha mencionado, el test  $r^N$  funciona correctamente en presencia de una sola medida errónea que no sea crítica. Si existen varias medidas erróneas pueden

darse las tres situaciones siguientes, en las que dicho test funciona de forma diferente [1]:

- Sin interacción: Si  $S_{ik} \approx 0$  se dice que las medidas  $i$  y  $k$  no interaccionan, es decir, un error en cualquiera de ellas no afecta al residuo de la otra (residuos independientes). Cuando hay varias medidas erróneas de este tipo, la prueba del mayor residuo normalizado puede identificarlas secuencialmente, una en cada pasada.
- Con interacción pero inconsistentes: Si  $S_{ik}$  tiene un valor no despreciable, entonces existe interacción entre los residuos de  $i$  y  $k$ . Sin embargo, si ambos errores son inconsistentes entre ellos, la prueba de los residuos normalizados puede identificarlos correctamente como en el caso anterior, aunque no necesariamente. La consistencia de errores se refiere, en este contexto, a la tendencia indicada por el signo del error.

Ejemplos de errores inconsistentes son: dos medidas de tensión en un embarrado, una por exceso y otra por defecto, flujo de potencia activa por exceso y de reactiva en la misma línea por defecto, etc.

- Con interacción y consistentes: Como en el caso anterior  $S_{ik}$  es grande, pero los errores de ambas medidas son coherentes. En este caso, el test de residuos normalizados puede fallar en la identificación de ambos, dependiendo de la redundancia local existente.

## Identificación mediante Test de Hipótesis

La diferencia de este método con el del test de residuos normalizados está en que calcula directamente una estimación de los errores de las medidas. A diferencia de los residuos, los errores de las medidas son independientes, y por tanto pueden detectarse errores consistentes en medidas relacionadas. La efectividad del método depende de la elección de un conjunto inicial de medidas sospechosas, entre las que deben incluirse las medidas erróneas. Esta preselección, basada en los residuos normalizados, constituye la principal limitación de esta técnica, cuyos fundamentos se explican a continuación.

Se parte de un conjunto de medidas no críticas y linealmente independientes designadas como sospechosas, siendo el número de tales medidas decidido por el usuario. El resto de medidas se suponen libres de errores. Las matrices de sensibilidad  $S$  y de covarianza de los errores  $R$  se particionan como se indica:

$$r_t = S_{ts}e_s + S_{tt}e_t \quad (60)$$

$$R = \begin{bmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_t \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Considerando el último término de la primera ecuación como ruido, puede obtenerse una estimación para  $e_s$  de

$$\hat{e}_s = S_{ss}^{-1} r_s. \quad (62)$$

El método del test de hipótesis comienza con un conjunto de medidas sospechosas relativamente grande y va eliminando progresivamente medidas de este conjunto en base a los errores estimados  $\hat{e}_{s,i}$ . Esta técnica no puede identificar errores de medidas que no hayan sido incluidas previamente como sospechosas en la primera selección, y como esta selección se realiza en base a los residuos normalizados, el método es vulnerable al posible enmascaramiento de medidas erróneas con fuerte interacción.

# **CAPÍTULO 3. METODOLOGÍAS DE RESOLUCIÓN DEL ESTIMADOR DE ESTADO**

### 3. Metodologías de resolución del Estimador de Estado

#### 3.1. Introducción

Para poder determinar el estado estimado de un sistema se precisa su condición de operación y, con ello, su modelización matemática, ya que todos los valores se pueden calcular a partir de las magnitudes de las tensiones y los ángulos. Así, la base matemática empleada en la estimación de estado se fundamenta en las relaciones existentes entre las medidas y las variables de estado.

En base a lo expuesto anteriormente, las medidas disponen de unos errores aleatorios independientes con distribución gaussiana y media nula. La varianza del error de la medida indica el nivel de exactitud de la medida. Una varianza elevada indicará que la medida no es muy exacta y una varianza pequeña indicará que la medida es muy exacta.

En la teoría analizada se expone que  $z$  tiene distribución gaussiana con media  $h(x)$  y covarianza  $R$  y la función de densidad de probabilidad de  $z$  se puede escribir como

$$f(z) = (\sqrt{2\pi})^{-m} |W|^{(1/2)} e^{-\frac{1}{2}[z-h(x)]^T W [z-h(x)]}. \quad (63)$$

Durante los últimos años se ha evolucionado en el modelado numérico de la estimación y cada vez existen más técnicas que profundizan y perfeccionan aspectos relacionados.

Las redes han ido creciendo, los modelos de las mismas han ido evolucionando y a su vez, se han ido adaptando los modelados matemáticos a estos cambios, apareciendo con ellos múltiples problemas que antes con sistemas de menor tamaño no existían. Uno de estos problemas es el mal condicionamiento numérico. Cuando el sistema está mal condicionado se produce lentitud en la convergencia a la solución, así como fallos en dicha convergencia.

En redes de media tensión, el mal condicionamiento se produce cuando:

- Existe disparidad en los factores de peso.
- Existe un número elevado de medidas de inyección.
- Existe conexión entre líneas cortas y largas incidiendo en el mismo nudo.

La manera de solucionar el problema de la estimación de estado es mediante una secuencia de puntos  $x_0, x_1, x_2, \dots$  en cada iteración donde se resuelve una parte del problema general en el que el siguiente punto  $x_{k+1}$  se calcula a partir del punto  $x_k$  y del valor del parámetro  $p$  (impedancias, tensiones, etc.) [2]. Todo esto se puede

representar mediante la siguiente función:  $x_1 = f(x_0, p)$ ,  $x_2 = f(x_1, p)$ ,... Este proceso converge si  $x_n$  se aproxima a la solución de  $x$ .

Por otro lado, como consecuencia de que un número  $x_1$  se almacena mediante una aproximación  $x_1^*$ , aparece el error de redondeo que es la diferencia de ambos números. El efecto del error de redondeo es que en lugar de utilizar  $x_2 = f(x_1, p)$ , en los cálculos se emplea  $x_2^* = f(x_1^*, p)$ .

Matemáticamente, un algoritmo se dice que está mal condicionado si la diferencia entre  $f(x_1, p)$  y  $f(x_1^*, p)$  o entre  $f(x_1, p)$  y  $f(x_1, p^*)$  es grande siendo  $x_1$  y  $x_1^*$  o  $p$  y  $p^*$  valores muy próximos y, por lo tanto, da idea de cómo de grandes pueden ser esos errores en la solución ante errores en los datos de partida.

Además, a las medidas se les asignan diferentes factores de peso dependiendo de la credibilidad que se les dé. Así, un valor elevado de dicho factor indica que la medida es muy fiable y se le quiere dar relevancia a la hora de obtener su valor exacto correspondiente y, al contrario, su factor de peso será bajo si la credibilidad que ofrece la medida es muy pequeña. Un ejemplo de mal condicionamiento ocurre cuando existe disparidad en los factores de peso. Sucede por ejemplo cuando aparecen valores grandes asociados a las medidas virtuales (considerándose así que son medidas más exactas), y pequeños a las pseudomedidas, es decir, éstas se consideran medidas menos exactas.

En transporte existen numerosos métodos matemáticos para la resolución del estimador de estado. Como bien se comentó antes, son varias las diferencias existentes entre redes de transporte y distribución como para aplicar los mismos métodos de resolución en ambas. No obstante, en los diversos documentos analizados de estimación de estado en redes de distribución casi siempre se recurre a la misma base matemática para hallar la solución de la función objetivo.

Es por ello, que para resolver el problema del mal condicionamiento, se han rescatado diversos métodos que se emplean para la estimación de estado en redes de transporte [2], para finalmente resaltar aquellos que se emplean también en el estimador de estado de redes de distribución:

- Mínimos cuadrados ponderados
- Ecuaciones normales con restricciones.
- Transformaciones ortogonales.
- Método híbrido.
- Método de la matriz aumentada de Hatchel.
- Método de pseudoinversas o de Peters y Wilkinson.
- Método de la matriz aumentada por bloques.
- Mínimos valores absolutos.

- Mínima mediana de cuadrados.

Como se ha comentado, para resolver la estimación de estado existen varios métodos numéricos y en este apartado se van a presentar las características más conocidas de estas metodologías de resolución.

Cabe destacar además, que para resolver los estimadores de estado de distribución se necesitan metodologías robustas ya que estas redes confluyen muchos factores de mal condicionamiento.

### 3.2. Mínimos Cuadrados Ponderados

Este método se ha hecho famoso por su utilidad ya que se fundamenta en un estudio estadístico para hallar la solución [2].

Como ya se conoce, el planteamiento del problema de estimación se basa en obtener un estado estimado  $x$  a partir de un conjunto de medidas  $z$ . El conjunto  $x$  que maximiza la función de densidad de probabilidad ( 63 ) es el estimado de máxima verosimilitud  $\hat{x}$ . Esto se fundamenta en que si se han observado dichas medidas es porque el estado que dio lugar a ellas es, desde el punto de vista estadístico, el más probable, y si no lo es, se habrían observado otras medidas con una probabilidad bastante alta [2].

Según la estadística matemática clásica,  $\hat{x}$  tiene propiedades deseables para un estimador y toma como criterio de bondad para este caso la varianza del mismo. Es posible afirmar según [2], que este estimador posee asintóticamente las siguientes propiedades (siendo  $m$  un valor elevado):

- Insesgado:  $E(\hat{x}) = x$ .
- Suficiente: Utiliza toda la información estadística existente en la muestra.
- Eficiente: Alcanza la cota de Cramer-Rao

$$-E \left[ \left( \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} \right)^T \right] \quad (64)$$

- Consistente:  $\hat{x}_m \rightarrow x$  si  $m \rightarrow \infty$ .

Así pues, desde el punto de vista estadístico, es posible afirmar que, como mucho, se encontrará un estimador tan bueno como  $\hat{x}$ , pero no mejor.

Maximizar  $f(z)$  es equivalente a minimizar el término cuadrático del exponente:

$$J(x) = [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \quad (65)$$

$$= \sum_{i=1}^m \frac{[z_i - h_i(x)]^2}{\sigma_i^2} \quad (66)$$

siendo  $J(x)$  la función objetivo.

Como en este caso el estimador de máxima verosimilitud minimiza el error cuadrático ponderado con la exactitud de las medidas, éste es el estado estimado de mínimos cuadrados ponderados.

La solución del problema de mínimos cuadrados ponderados a la que se llega con la ecuación ( 65 ), proporciona el estado estimado de  $\hat{x}$  que satisface la siguiente condición de optimización:

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = 0 \Rightarrow g(\hat{x}) = H^T(\hat{x})W[z - h(\hat{x})] = 0 \quad (67)$$

donde

$$H(x) = \frac{\partial h(x)}{\partial x} \quad (68)$$

es la matriz Jacobiano.

Independientemente de la visión estadística de la función  $J(x)$  es posible dar otra interpretación geométrica de dicha elección. Por analogía con mínimos cuadrados lineales se puede decir que minimizar dicha función es encontrar el estado que hace que la distancia desde las medidas obtenidas a las medidas estimadas sea mínima.

La solución de  $\hat{x}$  de la ecuación no lineal ( 67 ) se puede obtener mediante un método iterativo en el que el vector de estado en la iteración k-ésima es  $x^k$  y en cada iteración se resuelve la ecuación lineal:

$$A(x^k)\Delta x^k = -H^T(x^k)W[z - h(x^k)] \quad (69)$$

y de la que se obtiene la corrección  $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k$ . En la Ecuación ( 69 )  $A(x^k)$  es una matriz no singular que depende del método utilizado y mientras que la secuencia de puntos  $x^k$  generada por el método iterativo converja, convergerá a la solución de la Ecuación ( 67 ). La dependencia de  $x$  se omitirá en lo sucesivo para simplificar la notación.



Un método que garantiza convergencia cuadrática local es el método iterativo de Newton, para el cual la matriz  $A(x)$  viene dada por:

$$A(x) = \frac{\partial g}{\partial x} \quad (70)$$

siendo el elemento  $ij$ -ésimo de  $\partial g / \partial x$ :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \left( \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)^T W[z - h(x)] - \left( \frac{\partial h}{\partial x_i} \right)^T W \left( \frac{\partial h}{\partial x_j} \right). \quad (71)$$

El método de Newton ignora los términos de derivadas segundas quedando:

$$A(x) = H^T(x)WH(x) \quad (72)$$

por lo que la Ecuación ( 69 ) se transforma en:

$$G(x)\Delta x = H^T(x)W[z - h(x)] \quad (73)$$

donde

$$G(x) = H^T(x)WH(x) \quad (74)$$

es la matriz de ganancia. Esta matriz posee las características de ser dispersa, definida positiva y simétrica, lo que asegura la observabilidad del sistema. La expresión de ( 73 ) son las ecuaciones normales del problema de mínimos cuadrados ponderados que se resuelven mediante factorización triangular de la matriz de ganancia

$$G = U^T U \quad (75)$$

siendo  $U$  una matriz triangular superior. A continuación se resuelve  $\Delta x$  mediante eliminación hacia delante y sustitución hacia atrás de

$$(U^T U)\Delta x = H^T W \Delta z \quad (76)$$

siendo  $\Delta z = z - h(x)$ .

### 3.3. Ecuaciones Normales con Restricciones

Cuando existen medidas virtuales que representan relaciones matemáticas exactas, éstas se pueden incorporar directamente en la formulación de mínimos cuadrados asignándoles un factor de peso elevado, si bien, y como se ha comentado anteriormente, esto puede provocar mal condicionamiento.

Debido a esto, lo que se propone en [2] es dividir el conjunto de medidas en:

$$\begin{aligned} \text{Telemedidas: } z &= h(x) + v \\ \text{Medidas virtuales: } c(x) &= 0 \end{aligned} \quad (77)$$

Por lo que la matriz Jacobiano se divide en  $H$  y  $C$  siendo  $H$  la submatriz Jacobiano de las telemedidas solamente y  $C$  la de las medidas virtuales. Si  $k$  es la relación entre los factores de peso de las medidas virtuales y las telemedidas, entonces, de las ecuaciones normales (73) se obtiene

$$\begin{bmatrix} H \\ C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H \\ C \end{bmatrix} \Delta x = \begin{bmatrix} H \\ C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z \\ \Delta c \end{bmatrix} \quad (78)$$

siendo  $\Delta c = -c(x)$ .

Para valores de  $k$  muy elevados, el término  $kC^T C$  es dominante en la matriz, sin embargo, no suele haber suficientes medidas virtuales como para que la  $C$  sea de rango completo y por tanto sea observable la red. Por lo tanto, para valores de  $k$  grandes, la matriz de coeficientes en (78) tiende a ser singular causando problemas de mal condicionamiento.

Se propone entonces separar las medidas virtuales de las telemedidas, de forma que aquellas se tratan como restricciones de igualdad, y evitar así el problema del mal condicionamiento. De este modo,  $z$  solamente incluirá las telemedidas y las pseudomedidas.

Ahora, el problema se centra en encontrar una solución que minimice la función objetivo cumpliendo las restricciones de igualdad.

$$\begin{aligned} \min J(x) &= \sum_{i=1}^m \frac{[z_i - h_i(x)]^2}{\sigma_i^2} \\ \text{s. a. } c(x) &= 0 \end{aligned} \quad (79)$$

Es común, para resolver este problema, emplear los multiplicadores de Lagrange, obteniendo el estimado  $\hat{x}$  en un procedimiento iterativo en el que la ecuación linealizada que se resuelve en cada iteración es:

$$\begin{bmatrix} H^T W H & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T W \Delta z \\ \Delta c \end{bmatrix} \quad (80)$$

siendo

$$F = \begin{bmatrix} H^T W H(x) & C^T \\ C & 0 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

Se realiza la factorización triangular

$$F = U^T U \quad (82)$$

y mediante eliminación hacia delante y sustitución hacia atrás de

$$(U^T U) \begin{bmatrix} \Delta x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T(x) W \Delta z \\ \Delta c \end{bmatrix} \quad (83)$$

se obtiene  $\Delta x$ .

### 3.4. Transformaciones Ortogonales

La función objetivo del problema de mínimos cuadrados en cada iteración resulta ser en [2]:

$$\begin{aligned} J(\Delta x) &= (\Delta z - H \Delta x)^T (\Delta z - H \Delta x) \\ &= (\Delta \tilde{z} - \tilde{H} \Delta x)^T (\Delta \tilde{z} - \tilde{H} \Delta x) \\ &= \|\Delta \tilde{z} - \tilde{H} \Delta x\|^2 \end{aligned} \quad (84)$$

donde

$$\tilde{H} = W^{1/2} H \quad (85)$$

$$\Delta\tilde{z} = W^{1/2}\Delta z. \quad (86)$$

Siendo  $I$  la matriz unitaria, sea  $Q$  una matriz ortogonal, es decir  $Q^T Q = I$ , y tal que

$$\tilde{H} = Q^T \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Entonces se tiene:

$$\begin{aligned} J(\Delta x) &= (\Delta\tilde{z} - \tilde{H}\Delta x)^T Q^T Q (\Delta\tilde{z} - \tilde{H}\Delta x) \\ &= \|Q\Delta\tilde{z} - Q\tilde{H}\Delta x\|^2 \\ &= \|\Delta y_1 - U\Delta x\|^2 + \|\Delta y_2\|^2 \end{aligned} \quad (88)$$

donde

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \Delta\tilde{z} = \begin{bmatrix} \Delta y_1 \\ \Delta y_2 \end{bmatrix}. \quad (89)$$

El mínimo de la ecuación ( 88 ) ocurre cuando

$$U\Delta x = \Delta y_1 \quad (90)$$

es decir,

$$U\Delta x = Q_1 W^{1/2} \Delta z \quad (91)$$

y de esta ecuación, aplicando resolución hacia atrás, se obtiene  $\Delta x$ .

El método comienza realizando la transformaciones ortogonales ( 87 ) y ( 89 ) de  $\tilde{H}$  y  $\Delta\tilde{z}$  y a continuación se resuelve ( 90 ) mediante la sustitución hacia atrás. De esta manera se evita tener que construir  $G$ , si bien  $Q$  es más densa. Por ello, para la obtención de  $Q$  se utiliza la transformación de Givens [2].

### 3.5. Método Híbrido

Teniendo en cuenta ( 87 ) se obtiene:

$$G = H^T W H = \tilde{H}^T \tilde{H} = U^T Q Q^T U = U^T U. \quad (92)$$

El método híbrido resuelve las ecuaciones normales utilizando

$$U^T U \Delta x = H^T W \Delta z \quad (93)$$

Los puntos principales de este método son la transformación ortogonal ( 87 ) de  $\tilde{H}$ , con lo que se evita la necesidad de utilizar  $G$ , y la resolución de las ecuaciones normales ( 93 ) mediante eliminación hacia adelante y sustitución hacia atrás sin necesidad de tener que almacenar  $Q$  [2].

### 3.6. Método de la Matriz Aumentada de Hatchel

Para resolver el problema de minimización con restricciones de  $\hat{x}$  se utiliza el método de la matriz aumentada de Hachtel [2] en el que las ecuaciones se aumentan con el vector de residuos y se resuelven en cada iteración las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & \alpha W^{-1} & H \\ C^T & H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{-1} \lambda \\ \alpha^{-1} W \Delta r \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta c \\ \Delta z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (94)$$

siendo:

$$\Delta r = \Delta z - H \Delta x \quad (95)$$

$\lambda$  es el multiplicador de Lagrange y  $\alpha$  es un parámetro utilizado para controlar la estabilidad numérica.

Las variables que se calculan en cada iteración son, además de  $\Delta x$ :

$$\lambda' = -\alpha^{-1} \lambda \quad (96)$$

$$\Delta r' = \alpha^{-1} W \Delta r. \quad (97)$$

Definiendo

$$K(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & \alpha W^{-1} & H \\ C^T & H^T & 0 \end{bmatrix} \quad (98)$$

Se realiza la factorización triangular

$$K = U^T U \quad (99)$$

y mediante eliminación hacia adelante y sustitución hacia atrás de

$$(U^T U) \begin{bmatrix} \lambda' \\ \Delta r' \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta c \\ \Delta z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

se obtienen las correcciones.

En el caso particular de que no existan restricciones de igualdad las ecuaciones a resolver son:

$$\begin{bmatrix} \alpha W^{-1} & H \\ H^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha W^{-1} \Delta r \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Este método tiene el inconveniente de destruir la simetría de la matriz debido a los pivotamientos.

### 3.7. Método de Pseudoinversas

Este método, reconocido también con el nombre de Peters y Wilkinson, realiza la minimización del error de mínimos cuadrados mediante la siguiente transformación del problema original (se inicia igual que el método de las transformaciones ortogonales) [2]:

$$\tilde{H} = W^{-1/2} H \quad (102)$$

$$\Delta \tilde{z} = W^{-1/2} \Delta z \quad (103)$$

con lo que el problema queda reducido a:

$$J(x) = \tilde{r}^t \tilde{r} \quad (104)$$

siendo

$$\tilde{r} = \tilde{H}\Delta x - \Delta \tilde{z}. \quad (105)$$

Factorizando  $\tilde{H}$  de manera que:

$$\tilde{H} = LU \quad (106)$$

siendo  $L$  una matriz triangular inferior y  $U$  una matriz triangular superior, y definiendo:

$$y = U\Delta x. \quad (107)$$

Entonces, el problema se reduce a:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \tilde{r}^t \tilde{r} \\ &\text{sujeto a: } \tilde{r} = Ly - \Delta \tilde{z}. \end{aligned} \quad (108)$$

De este problema transformado se obtiene y de la ecuación:

$$[L^T L]y = L^T \Delta \tilde{z} \quad (109)$$

no siendo  $L^T L$  tan mal condicionado como  $G$  y obteniéndose la solución del problema original mediante la resolución del sistema triangular superior de ecuaciones:

$$U\Delta x = y. \quad (110)$$

La resolución con restricciones se puede expresar como:

$$\begin{bmatrix} C \\ \tilde{H} \end{bmatrix} \Delta x = \begin{bmatrix} \Delta c \\ \Delta \tilde{z} \end{bmatrix} \quad (111)$$

realizándose la misma factorización que el método sin restricciones. Se crea una matriz triangular superior  $U$  no singular y una triangular inferior  $L$ , teniendo ésta la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \quad (112)$$

La resolución se realiza calculando previamente una variable intermedia  $\omega$  de  $L_{11}\omega = \Delta c$  mediante eliminación hacia delante. Seguidamente se obtiene otra variable intermedia  $y$  de:

$$L_{22}^T L_{22} y = L_{22}^T \Delta \tilde{z} \quad (113)$$

mediante factorización dispersa. Por último se resuelve:

$$U \Delta x = \begin{bmatrix} \omega \\ y \end{bmatrix} \quad (114)$$

y se obtiene  $\Delta x$  mediante sustitución hacia atrás.

### 3.8. Método de la Matriz Aumentada por Bloques

Este método se fundamenta básicamente en organizar la formulación del método de la matriz aumentada de Hachtel como una submatriz con estructura de bloques que se ajuste a la forma de la matriz de incidencias de la red y de esta manera queda como una matriz dispersa [2].

Se agrupa en flujos toda la información asociada a las medidas, incluyendo tensiones, e inyecciones eliminándose toda la formulación explícita de los flujos en la resolución del sistema. Las únicas restricciones que se consideran están asociadas a inyecciones y todas ellas son, por tanto, informaciones nodales.

Separando en la Ecuación ( 94 ) la información en inyección (subíndice  $i$ ) o de flujo y tensiones (subíndice  $f$ ) y haciendo  $\alpha = 1$  por claridad, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_i^{-1} & 0 & H_i \\ 0 & 0 & W_f^{-1} & H_f \\ C^T & H_i^T & H_f^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda \\ W_i \Delta r_i \\ W_f \Delta r_f \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta c \\ \Delta z_i \\ \Delta z_f \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (115)$$

Seguidamente, permutando en la matriz de información las filas y las columnas que involucran a las restricciones y eliminando de ella  $H_f^T$ :



$$\begin{bmatrix} W_f^{-1} & 0 & 0 & H_f \\ 0 & W_i^{-1} & 0 & H_i \\ 0 & 0 & 0 & C \\ H_f^T & H_i^T & C^T & -H_f^T W_f H_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_f \Delta r_f \\ W_i \Delta r_i \\ -\lambda \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_f \\ \Delta z_i \\ \Delta c \\ -H_f^T W_f \Delta z_f \end{bmatrix} \quad (116)$$

En ( 116 ) se observa que la ecuación asociada a los residuos de las medidas de flujos queda desacoplada del resto del sistema, por lo que la ecuación matricial que se tiene que resolver es:

$$\begin{bmatrix} W_i^{-1} & 0 & H_i \\ 0 & 0 & C \\ H_i^T & C^T & -H_f^T W_f H_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_i \Delta r_i \\ -\lambda \\ \Delta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta z_i \\ \Delta c \\ -H_f^T W_f \Delta z_f \end{bmatrix}. \quad (117)$$

El sistema debe ser reordenado para obtener una estructura particionada en bloques de manera que la factorización obtenida evite pivotes pequeños o nulos que puedan provocar una eliminación ineficiente e inestable.

El modelo de ( 117 ) tiene una estructura intermedia entre ( 80 ) y ( 94 ), siendo  $H_f^T W_f \Delta z_f$  un subconjunto de la matriz de admitancia nodal y estando todas las variables de ( 117 ) relacionadas con los nodos de la red.

### 3.9. Mínimos Absolutos

El modelo del sistema que relaciona las medidas con los estados que se van a estimar es  $z = h(x) + v$ , que linealizando en torno al punto de operación  $x_0$  es:

$$\Delta z = H(x_0) \Delta x + v \quad (118)$$

donde

$$\Delta z = z - h(x_0) \quad (119)$$

$$H(x_0) = \left. \frac{\delta h}{\delta x} \right|_{x=x_0} \quad (120)$$

$$\Delta x = x - x_0. \quad (121)$$

El estimador de mínimos valores absolutos se obtiene minimizando la siguiente función objetivo:

$$J(x) = \sum_{i=1}^m w_i |\Delta z_i - H_i(x_0)\Delta x| \quad (122)$$

Esta función se puede minimizar iterativamente resolviendo el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} \text{minimizar } J(x) &= \sum_{i=1}^m w_i (u_i + v_i) \\ \text{sujeto a } \Delta z_0 &= H(x_0)\Delta x_u - H(x_0)\Delta x_v + u - v \end{aligned} \quad (123)$$

donde

- $\Delta x_u, \Delta x_v, u, v \geq 0$
- $\Delta x_u(i) = \Delta x(i)$  si  $\Delta x(i) \geq 0$  y 0 en los otros casos
- $\Delta x_v(i) = \Delta x(i)$  si  $\Delta x(i) \leq 0$  y 0 en los otros casos
- $u$  y  $v$  son vectores no negativos de dimensión  $m \times 1$  tales que  $\min[u(i), v(i)] = 0$  y  $\max[u(i), v(i)] = |\Delta z_i - H_i(x_0)\Delta x|$

El problema de programación lineal asociado a (123) se puede resolver en dos fases. En la primera de ellas se obtiene una posible solución básica y en la segunda se realiza la optimización iterativamente mediante el método Simplex hasta encontrar la solución óptima. [2]

La primera fase se inicia estableciendo como solución básica una matriz diagonal de dimensión  $m \times m$  cuyos elementos son 1 ó -1, dependiendo del signo del elemento del término independiente. A continuación, se obliga a que la base contenga todas las columnas de  $H(x_0)$ . De esta forma se puede conseguir un conjunto de medidas observables sin que las variables  $u(i), v(i)$  se encuentren en la base resultante.

En el caso de la estimación de estado, el conjunto de medidas observables obtenido para una configuración de medidas particular se puede utilizar para inicializar el estimador de mínimos valores absolutos siempre que no varíe la configuración del sistema.

Los pasos a seguir para resolver dicho problema de programación lineal utilizando el método Simplex son los siguientes:

1. Elegir una base inicial que determina un conjunto mínimo de medidas que hacen completamente observable el sistema. Realizar la factorización triangular de la base elegida.
2. Encontrar la solución básica, la cual puede ser no resoluble debido a algún  $\Delta x(i)$  negativo. Si es así, cámbiese el signo de la correspondiente comuna de  $H(x_0)$ .
3. Determinar el costo relativo de las variables no básicas. Si todos son negativos, parar; se ha encontrado la solución óptima. En caso contrario, elegir la variable con mayor costo relativo negativo para introducirla en la próxima base.
4. Determinar el término pivote (variable que abandonará la base). No permitir que las variables de estado  $\Delta x$  abandonen la base.
5. Intercambiar las columnas de las variables que se incorporan y salen de la base. Ir al paso 2.

Si se aplica este método directamente al problema de programación lineal planteado en la ecuación ( 123 ) se produce un código de programación ineficiente.

### 3.10. Mínima Mediana de Cuadrados

El método de estimación de estado de mínima mediana de cuadrados está desarrollado para modelos no lineales y utiliza matrices dispersas de manera que el tiempo empleado en el procesamiento numérico sea lo más reducido posible.

Siendo  $M$  el número de nudos de la red y  $n=2N-1$ , en el caso unidimensional y de regresión simple ( $n=1$  ó  $2$ ), el estimador no minimiza la suma, sino la mediana de los cuadrados de los residuos. En el caso de regresión múltiple la función objetivo que se minimiza es

$$J(x) = r_{W(k)}^2 \quad (124)$$

siendo

$$k = \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \quad (125)$$

Y  $r_{W(k)}^2$  es el  $k$  – ésimo residuo cuadrado ponderado, donde el residuo ponderado es:

$$r_w = \frac{r_i}{\sigma_i} \quad (126)$$

y

$$r = z - \hat{z} \quad (127)$$

es el residuo de las medidas, con  $\hat{z}$  la medida estimada.

En primer lugar se elevan al cuadrado los residuos ponderados y a continuación se ordenan de menor a mayor, siendo el  $k$  –ésimo el mayor de ellos.

En este método se emplea un procedimiento combinatorial repetidamente para seleccionar muestras observables del sistema de tamaño  $n$ . Para cada muestra, el sistema no lineal se resuelve mediante el método de Newton-Raphson, hallándose a continuación los residuos ponderados, elevándolos al cuadrado y ordenándolos de menor a mayor. El estimado de mínima media de cuadrados se obtiene minimizando la función objetivo entre las muestras seleccionadas.

En principio, la búsqueda combinatorial incluiría  $\binom{m}{n}$  muestras, lo que lleva a tiempos computacionales elevados, incluso en el caso de pequeños sistemas. Sin embargo, se pueden considerar solamente un cierto número  $i$  de selecciones aleatorias de manera que la probabilidad  $P$  de que al menos una muestra no esté contaminada con errores no gaussianos sea próxima a 1. (normalmente 0.95).

Para hallar la expresión de  $P$  en términos de  $i$ , se considera que  $\epsilon$  es la fracción de errores no gaussianos entre las  $m$  observaciones. Si  $m$  es grande, entonces  $\epsilon$  es la probabilidad de que exista un error no gaussiano. Por lo tanto, la probabilidad de seleccionar  $n$  datos buenos es  $(1 - \epsilon)^n$  y la probabilidad de seleccionar  $i$  muestras contaminadas de tamaño  $n$  es  $(1 - (1 - \epsilon)^n)^k$ .

Entonces,

$$P = 1 - (1 - (1 - \epsilon)^n)^k \quad (128)$$

y para  $P$ ,  $n$  y  $\epsilon$  dados se puede hallar el mínimo número de muestras  $i$  que hay que considerar. En la práctica, es deseable no tener únicamente un buen conjunto de muestras, sino varios, por lo que se toman  $2 \times i$ .

### 3.11. Conclusiones

A pesar de la amplia gama de métodos de resolución numérica que se han presentado en los apartados anteriores, el método de mínimos cuadrados ponderados es el más empleado en los modelos de estimación de redes de distribución, debido a las propiedades estadísticas que posee y la facilidad de su implementación. Además del método de WLS, también es común ver en los textos de estimación de estado en redes

de distribución, el método de las ecuaciones normales con restricciones de igualdad. No obstante, se están recabando métodos novedosos, estudios de algoritmos que den lugar a una estimación más óptima en todos los aspectos.

En el Capítulo 4 se puede observar la aplicación de esos métodos en varios modelos de estimación de estado propuestos para redes de distribución.

# **CAPÍTULO 4. EVOLUCIÓN DE LOS ESTIMADORES DE ESTADO EN REDES DE DISTRIBUCIÓN**

## 4. Evolución de los estimadores de estado en redes de distribución

En este capítulo se ha realizado un análisis cronológico en profundidad de los estimadores de estado para redes de distribución más destacados de las últimas dos décadas. Además, se han expuesto las formulaciones que han sido consideradas más importantes desde los noventa hasta la actualidad, haciendo especial mención a sus autores, mostrando las características, ventajas e inconvenientes de sus modelos.

El objetivo de este estudio es alcanzar una visión global de las necesidades de los modelos existentes persiguiendo nuevas ideas que mejoren la estimación de estado en redes de distribución.

### 4.1. Estimador de estado con restricciones de igualdad

#### 4.1.1. Introducción

Ante la existencia de tres tipos de medidas (telemidas, pseudomedidas y medidas virtuales), Whei-Min Lin y Jen-Hao Teng, autores de esta metodología, en el año 1996 proponen un estimador de estado desacoplado rápido con medidas virtuales como restricciones de igualdad para sistemas de distribución trifásicos [3]. Para el tratamiento de las inyecciones nulas, se emplean aquí los multiplicadores de Lagrange. Además, en su artículo proponen utilizar medidas de intensidad equivalentes y que la formulación sea en cartesianas. El método emplea una matriz de Ganancia simétrica y constante que puede descomponerse en dos submatrices de Ganancia idénticas. De su formulación destaca que la actualización y factorización de la matriz de Ganancia solo se hace una vez.

De este modo, los autores presentan un método eficiente, seguro y robusto resolviendo sistemas de distribución trifásicos desequilibrados.

Una medida de inyección nula es un claro ejemplo de medida virtual sin error en su información. Estas inyecciones se encuentran en los nudos de interconexión de una red donde la potencia inyectada es cero, y se puede utilizar como una medida segura que no necesita medirse y que está siempre disponible.

Además, los autores de esta metodología mencionan en su artículo las diversas formas que hay de tratar medidas de inyección nulas, siendo éstas:

1. Por eliminación directa de las variables utilizando las igualdades
2. Por los pesos asignados a cada medida
3. Por el método de los multiplicadores de Lagrange

Según Lin y Teng el primer método puede afectar a la dispersión del sistema. El segundo método, de fácil implementación y que asigna pesos altos a las medidas virtuales y bajos a las pseudomedidas se descarta, ya que esa asignación de los pesos puede llevar al mal condicionamiento del modelo.

El último método es el que resulta de interés para estos autores, por ser el más novedoso hasta el momento y estar alcanzando gran importancia en los sistemas de distribución.

A continuación se va a describir la metodología que propusieron estos investigadores, las variables de estado que emplean en su formulación, el modelo y algunos detalles de su algoritmo [3].

#### 4.1.2. Variables de Estado

Como variables de estado, Lin y Teng escogen las tensiones de los nudos, siendo éstas  $\mathcal{V} = V\angle\theta$  en su forma polar, y  $\mathcal{V} = e + jf$  en su forma cartesiana.

#### 4.1.3. Formulación general: Ecuaciones normales con restricciones de igualdad

Dada la siguiente ecuación

$$z = h(x) + v \quad (129)$$

donde

$z$ : vector de medidas

$x$ : vector de estado

$h$ : vector de funciones de las medidas

$v$ : vector de ruido de las medidas.

Asumiendo que el vector de ruido de las medidas se obtiene a partir de una distribución gaussiana. Si  $R$  son los pesos asociados a cada medida,  $R_{ii} = \sigma_i^2$  es la varianza de la medida y  $\sigma_i^{-2}$  es el peso asociado a la misma. De esta manera, las restricciones de igualdad asociadas a las inyecciones nulas se pueden expresar como:

$$c(x) = 0. \quad (130)$$

Así, la función objetivo queda



$$J(x) = \frac{1}{2} [z - h(x)]^T R^{-1} [z - h(x)] = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m [z_j - h_j(x)]^2 / \sigma_j^2 \quad (131)$$

sujeto a la Ecuación ( 130 ).

Los multiplicadores de Lagrange se emplean como forma de resolver el problema de optimización equivalente

$$L(x, \lambda) = \frac{1}{2} [z - h(x)]^T R^{-1} [z - h(x)] + \lambda^T c(x) \quad (132)$$

donde  $\lambda$  es el vector de los multiplicadores de Lagrange.

Las derivadas parciales de ( 132 ) con respecto a  $\lambda$  y  $x$  quedan

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -H^T R^{-1} [z - h(x)] + C(x)^T \lambda = 0 \quad (133)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = c(x) = 0 \quad (134)$$

siendo  $H = \partial h / \partial x$  y  $C = \partial c / \partial x$  las matrices Jacobianas. Las Ecuaciones ( 133 ) y ( 134 ) pueden resolverse iterativamente mediante el método de Newton. En cada iteración se resuelve:

$$\begin{bmatrix} H^T & R^{-1} & H & C^T \\ C & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H^T & R^{-1} & \Delta z \\ \Delta c \end{bmatrix} \quad (135)$$

donde  $\Delta z = z - h(x)$ ,  $\Delta c = -c(x)$ .

#### 4.1.4. Modelo de línea empleado

Los autores de esta metodología emplean la Ilustración 7 como modelo de línea para el estudio que llevan a cabo. Las constantes de la línea podrían obtenerse por el método de Carson y Lewis según se argumenta en [3]. La Ilustración 8 muestra un circuito equivalente de la Ilustración 7.

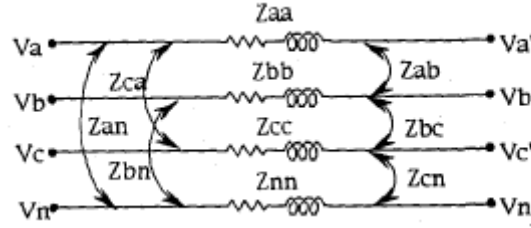


Ilustración 7. Sección de línea trifásica

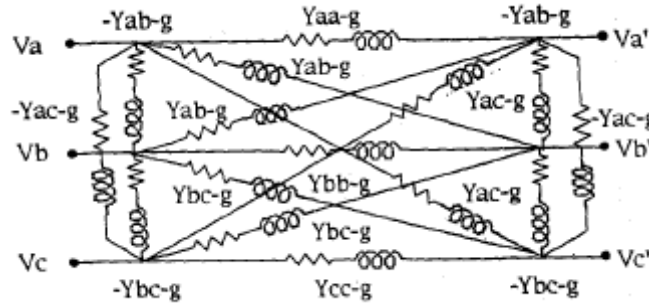


Ilustración 8. Circuito equivalente de sección de línea trifásica

El modelo de línea de la Ilustración 8 puede escribirse como

$$\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{aa} & Y_{ab} & Y_{ac} \\ Y_{ba} & Y_{bb} & Y_{bc} \\ Y_{ca} & Y_{cb} & Y_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a - v_{a'} \\ v_b - v_{b'} \\ v_c - v_{c'} \end{bmatrix} \quad (136)$$

donde  $y_{km} = g_{km} + jb_{km}$  es la admitancia de línea del nudo  $k$  al  $m$ .

#### 4.1.5. Formulación del algoritmo

Para una pareja de medidas de inyección de potencia en el nudo  $k$ , los términos del Jacobiano con respecto a las variables de estado quedan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P_K}{\partial \theta_m} & \frac{\partial P_K}{\partial V_m} \\ \frac{\partial Q_K}{\partial \theta_m} & \frac{\partial Q_K}{\partial V_m} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{\partial P_K}{\partial e_m} & \frac{\partial P_K}{\partial f_m} \\ \frac{\partial Q_K}{\partial e_m} & \frac{\partial Q_K}{\partial f_m} \end{bmatrix} \quad (137)$$

según estén las variables en polares o cartesianas.

Como se ha comentado en un principio, Lin y Teng apuestan por utilizar medidas equivalentes de intensidad. Un algoritmo de estimación de estado basado en intensidades convierte las medidas a medidas de intensidad equivalentes en cada iteración. A continuación se muestra la estructura del Jacobiano en este caso:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial I_K^r}{\partial e_m} & \frac{\partial I_K^r}{\partial f_m} \\ \frac{\partial I_K^i}{\partial e_m} & \frac{\partial I_K^i}{\partial f_m} \end{bmatrix} \quad (138)$$

Siendo  $\mathcal{I} = I^r + jI^i$  la inyección de intensidad en el nudo  $k$  expresada en cartesianas.

A partir de la Ilustración 7, y teniendo en cuenta las medidas equivalentes de intensidad aplicando la ecuación anterior, los autores muestran una matriz Jacobiana  $H(x)$  como sigue:

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e_1 \\ \Delta e_2 \\ \Delta e_3 \\ \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta I_1^r \\ \Delta I_2^r \\ \Delta I_3^r \\ \Delta I_1^i \\ \Delta I_2^i \\ \Delta I_3^i \end{bmatrix}. \quad (139)$$

Las líneas bifásicas y monofásicas pueden procesarse de manera similar pero con una estructura matricial de  $4 \times 4$  y  $2 \times 2$  respectivamente.

De manera general,  $H(x)$  se puede expresar como:

$$H = \begin{bmatrix} G & -B \\ B & G \end{bmatrix}. \quad (140)$$

Si las medidas son flujos de potencia, las intensidades equivalentes a estas medidas quedan [3]:

$$I_{km}^{mea-eqv} = \left[ \frac{(P + jQ)_{km}^{mea}}{V_k} \right]^* = Re(I_{km}^{mea-eqv}) + jIm(I_{km}^{mea-eqv}) \quad (141)$$

donde  $V_k$  es la tensión del nudo k. Los flujos de intensidad calculados son dados por:

$$I_{km}^{cal} = \sum y_{km} (V_k^{cal} - V_m^{cal}) = Re(I_{km}^{cal}) + jIm(I_{km}^{cal}). \quad (142)$$

La intensidad residual  $\Delta z = z - h(x) = \Delta I$  puede expresarse como

$$\begin{aligned} \Delta Z^r &= Re(I_{km}^{mea-eqv}) - Re(I_{km}^{cal}) = \Delta I^r \\ \Delta Z^i &= Im(I_{km}^{mea-eqv}) - Im(I_{km}^{cal}) = \Delta I^i. \end{aligned} \quad (143)$$

Las medidas de inyección de potencia en los nudos, de magnitud de tensión y de magnitud de intensidad, también pueden convertirse a medidas equivalentes de intensidad [3].

Lin y Teng poponen que:

$$H^T R^{-1} H = \begin{bmatrix} G_p & 0 \\ 0 & G_p \end{bmatrix} \quad (144)$$

y

$$H^T R^{-1} \Delta z = H^T R^{-1} \begin{bmatrix} \Delta z^r \\ \Delta z^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHSP \\ RHSQ \end{bmatrix} \quad (145)$$

donde

donde

$$RHSP = G^T R_p^{-1} \Delta z^r + B^t R_p^{-1} \Delta z^i$$

$$RHSQ = -B^T R_p^{-1} \Delta z^r + G^t R_p^{-1} \Delta z^i$$

$$G_p = G^T R_p^{-1} G + B^t R_p^{-1} B$$

#### 4.1.6. Tratamiento de las medidas de inyección nulas

En este apartado, los autores explican una de las bases de su método. Como se ha comentado en la Introducción del método, estas medidas serán introducidas como restricciones de igualdad del problema de optimización de manera que a partir de la Ecuación (139) se puede extraer

$$C(x) = \begin{bmatrix} Z_G & -Z_B \\ Z_B & Z_G \end{bmatrix} \quad (146)$$

donde

$Z_G$  contiene las entradas de  $g_{ij}$

$Z_B$  contiene las entradas de  $b_{ij}$ .

Sustituyendo las ecuaciones ( 144 ), ( 145 ) y ( 146 ) en ( 135 ) y reordenando las filas se obtiene ( 147 ):

$$\begin{bmatrix} G_P & Z_G & 0 & Z_B^T \\ Z_G & 0 & -Z_B^T & 0 \\ 0 & -Z_B & G_P & Z_G \\ Z_B & 0 & Z_G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \lambda^r \\ \Delta f \\ \lambda^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHSP \\ -I^r \\ RHSP \\ -I^i \end{bmatrix} \quad (147)$$

#### 4.1.7. Desacoplado rápido

Los autores del modelo ofrecen un desacoplado rápido para aquellos modelos de distribución en los que se cumple que  $g > b$ .

De este modo, descomponen la Ecuación ( 147 ) en dos:

$$\begin{bmatrix} G_P & Z_G \\ Z_G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta e \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = F(x) \begin{bmatrix} \Delta e \\ \gamma_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHSP \\ -I^r \end{bmatrix} \quad (148)$$

y

$$\begin{bmatrix} G_P & Z_G \\ Z_G & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta f \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = F(x) \begin{bmatrix} \Delta f \\ \gamma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} RHSQ \\ -I^i \end{bmatrix} \quad (149)$$

donde

$$F(x) = \begin{bmatrix} G_P & Z_G \\ Z_G & 0 \end{bmatrix}. \quad (150)$$

Así, el algoritmo de estimación de desacoplado rápido con restricciones de igualdad se puede resumir en los siguientes pasos:

- 1) Datos de entrada.
- 2) Obtener la forma matricial de  $G_p$  a partir de ( 144 ) y ( 145 ).
- 3) Obtener  $C(x)$  a partir de ( 146 ) para medidas de inyección nulas.

- 4) Obtener la submatriz de ganancia  $F(x)$ .
- 5) Factorizar  $F(x)$ .
- 6) Obtener las medidas equivalentes de intensidad.
- 7) Resolver el sistema y actualizar las variables.
- 8) Si  $\Delta e > \varepsilon$  ir a 6.
- 9) En caso contrario, parar.

## 4.2. Estimador de estado basado en intensidades de rama (I)

### 4.2.1. Introducción

Este método desarrollado por Baran y Kelly en 1995 [4], está basado en el método de WLS empleando como variables de estado las corrientes de las ramas. El modelo puede aplicarse a redes radiales y débilmente malladas (con pocos lazos creados por interruptores de la red). Además, sus autores defienden que el método es computacionalmente más eficiente y menos susceptible a los parámetros de la línea que el convencional basado en tensiones de los nudos de la red de estudio. Esta mejora viene principalmente del hecho de que la formulación empleada desacopla el problema del estimador de estado en tres subproblemas, cada uno para una fase.

Estos investigadores se plantearon como un reto el nuevo modelo, ya que entre sus desafíos estaban la incorporación de cargas desequilibradas propias de las redes de distribución, la escasez de medidas en tiempo real y el hecho de que las medidas fueran las amplitudes de la intensidad por las ramas, las cuales no se incluían normalmente en el método convencional.

### 4.2.2. Formulación genérica del problema de estimación de estado

Tanto este método como el convencional están basados en el método de WLS.

Este método resuelve el siguiente problema de mínimos cuadrados para obtener una estimación del punto de operación del sistema definido por el estado del sistema  $x$ :

$$\min_x J(x) = \sum_{i=1}^m w_i (z_i - h_i(x))^2 = [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \quad (151)$$

Donde  $w_i$  son los pesos de las medidas y  $h_i(x)$  es el vector de las funciones de medidas asociadas a las medidas  $z_i$ .

Para la solución de este problema, el método iterativo convencional está adaptado para resolver las ecuaciones normales de cada iteración para computar  $x^{k+1} = x^k + \Delta x$ , y así quedaría

$$[G(x^k)]\Delta x^k = H^T(x^k)W[z - h(x^k)] \quad (152)$$

donde

$$G(x) = H^T(x)WH(x) = H^TWH \quad (153)$$

es la matriz de ganancia y  $H$  es el Jacobiano de la función de medidas  $h(x)$ .

#### 4.2.3. Modelo de línea empleado

En general, las líneas principales de una red de distribución son trifásicas, sin embargo, pueden existir líneas bifásicas o monofásicas. Las cargas pueden ser trifásicas, bifásicas o monofásicas (como es el caso de las cargas de uso residencial). Además, es deseable emplear un modelo trifásico también recomendado para el análisis de flujo de potencia de las líneas.

Un modelo trifásico tiene en cuenta el acoplamiento magnético entre las fases de las líneas, y si se toma una sección se podría ver:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{V}_{t,1} \\ \mathcal{V}_{t,2} \\ \mathcal{V}_{t,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{s,1} \\ \mathcal{V}_{s,2} \\ \mathcal{V}_{s,3} \end{bmatrix} - g_l \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{l,1} \\ \mathcal{I}_{l,2} \\ \mathcal{I}_{l,3} \end{bmatrix} \quad (154)$$

donde  $Z_l = g_l Z$  es la matriz de impedancia,  $g_l$  es la longitud de la línea y  $l = 1, \dots, b$ , representa el segmento de la línea de estudio. Tener en cuenta que la ecuación anterior está redactada en función del segmento de línea considerado que se muestra a continuación:

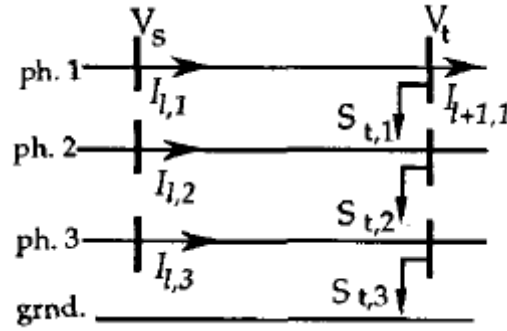


Ilustración 9. Modelo de línea

#### 4.2.4. Método de estimación basado en la tensión de los nudos

Baran y Kelley hacen un breve repaso del método convencional de estimación [4].

Los métodos convencionales de estimación toman como variables de estado las tensiones de los nudos, es decir, la amplitud y la fase de la tensión de cada nudo de la red de estudio. Estos métodos han sido extendidos para análisis trifásicos, sin embargo, el acoplamiento entre las fases aumenta la dimensión del modelo y disminuye la dispersión de su matriz de ganancia  $G$ , y la complejidad del método es comparada con el de las redes de transporte que emplea un modelo monofásico.

Sin embargo, el método propuesto tiene la ventaja de que se puede encargar de líneas con diferentes topologías (radial y mallada), aunque en la práctica las líneas son predominantemente radiales, excepto algunos casos en los que una red se convierta en mallada por el cierre de alguno de sus interruptores.

#### 4.2.5. Variables de estado

En los siguientes puntos de este modelo se va a demostrar que escoger intensidades de ramas como variables de estado simplifica las ecuaciones de las medidas  $h(x)$  e incluso reduce la complejidad computacional del problema del estimador de estado, especialmente para redes radiales.

Para introducir el método, primero se considera una red radial y se escogen las corrientes por las ramas tal que

$$J_{l,\varphi} = I_{rl,\varphi} + jI_{xl,\varphi} \quad (155)$$

donde  $\varphi$  representa las tres fases de la red de estudio.

Como variables de estado se tiene



$$x_\varphi = [J_{1,\varphi}, \dots, J_{b,\varphi}] = [I_{r1,\varphi}, I_{x1,\varphi}, \dots, I_{rb,\varphi}, I_{x1,\varphi}]. \quad (156)$$

Como se ha podido observar en la ecuación anterior, se han tomado como variables de estado las intensidades por las ramas. Realizando un flujo de cargas las tensiones de los nudos se pueden conocer a partir de estas intensidades.

Tomando la barra de la subestación como nudo de referencia, el procedimiento de un barrido hacia delante puede encontrar las tensiones de los nudos comenzando en la subestación y moviéndose hacia abajo en la línea, pasando por las ramas y actualizando las tensiones de los nudos. Además, las intensidades de las cargas se pueden calcular mediante la Ley de Kirchhoff de las intensidades para cada fase de cada nudo. Por ejemplo, para el nudo  $t$  de la Ilustración 9 quedaría:

$$J_{t,\varphi} = J_{l,\varphi} - J_{l+1,\varphi} \quad (157)$$

#### 4.2.6. Funciones de medidas $h(x)$

Para emplear las intensidades de las ramas como variables de estado en el estimador, se deben determinar en primer lugar las funciones de las medidas  $h_i(x)$  para cada medida  $z_i$ . Si todas las medidas fueran intensidades complejas de las ramas e inyecciones de intensidad en los nudos, entonces las funciones de medidas serían lineales como las Ecuaciones (155) y (157), e incluso el estimador podría ser simple.

Baran y Kelley explotan esta idea de linealidad del modelo de estimación, de manera que proponen la conversión de todas las medidas existentes a medidas equivalentes de intensidad. A continuación se explica este planteamiento para los casos en que se tengan medidas de potencia o medidas de tensión:

##### i) Medidas de Potencia

Se suponen que pueden estar disponibles dos tipos de medidas de potencia. Por un lado estarían las medidas de flujo de potencia reales y, por otro, las pseudomedidas obtenidas a partir de datos históricos.

Estas medidas de potencia se convierten a medidas equivalentes de intensidad, que son calculadas en cada iteración empleando las estimaciones de las tensiones disponibles. Por ejemplo, la medida equivalente de intensidad para el flujo de potencia ( $P_l^m, Q_l^m$ ) en el extremo emisor del segmento de línea  $l$  en la Ilustración 9 es:

$$I_{rl}^m(V_s^k) + jI_{xl}^m(V_s^k) \triangleq \left( \frac{P_l^m + jQ_l^m}{V_s^k} \right)^* \quad (158)$$

Donde  $V_s^k$  es el valor de la tensión disponible del nudo en la k-ésima iteración del proceso de resolución. Tener en cuenta que por simplificación en la notación, el subíndice  $\varphi$  para cada fase ha sido eliminado.

La función de medidas para la medida de intensidad equivalente ( $I_{rl}^m, I_{xl}^m$ ) es una función lineal de la siguiente forma:

$$h_{rl}(I_r) + jh_{xl}(I_x) = I_{rl} + jI_{xl}. \quad (159)$$

De manera similar, las pseudomedidas de la carga son convertidas a medidas equivalentes de intensidad de la carga.

Empleando este procedimiento de las intensidades equivalentes, se puede alcanzar una aproximación en la función objetivo. Por ejemplo, el término correcto en la función objetivo correspondiente a la medida de potencia ( $P_l^m, Q_l^m$ ) sería

$$J_l = w_l |V_s|^2 \{ (I_{rl}^m(V_s) - h_{rl}(I_r))^2 + (I_{xl}^m(V_s) - h_{xl}(I_x))^2 \}. \quad (160)$$

A continuación, se expone la misma idea pero aproximando a utilizar la tensión disponible  $V_s^k$  en lugar de la tensión actual  $V_s$  como

$$J_l^k \approx w_l |V_s^k|^2 \{ (I_{rl}^m(V_s^k) - h_{rl}(I_r))^2 + (I_{xl}^m(V_s^k) - h_{xl}(I_x))^2 \} \quad (161)$$

Además, en su propuesta plantea que  $|V_s|^2$  es aproximadamente 1.0 pu.

ii) Medidas de Intensidad

La función de medida dada para una medida de intensidad  $I_{l,\varphi}^m$  quedaría

$$h_{cl}(I_\varphi) = \sqrt{I_{rl,\varphi}^2 + I_{xl,\varphi}^2} \quad (162)$$

refiriéndose el subíndice  $c$  a la intensidad (current en inglés).

iii) Medidas de Tensión

Para este caso se considera que las medidas de tensión (si las hay) serán ignoradas en este método, excepto la medida de la tensión de la subestación que será empleada como nudo de referencia. Esto se basa en que las medidas de tensión no tienen un efecto significativo en los resultados del estimador provistos para que el sistema sea observable. La propuesta aquí es emplear las tensiones como una comprobación de la

consistencia del modelo de las líneas y las medidas mediante la comparación de los resultados del estimador con las medidas de tensión.

#### 4.2.7. Método de estimación de estado basado en la Intensidad de rama

Es en este punto cuando, empleando medidas de intensidad, reales y/o equivalentes, el problema de estimación propuesto en la Ecuación ( 151 ) ha de ser resuelto para estimar todas las intensidades de ramas.

La función objetivo que se ha planteado en la Ecuación ( 151 ) es separable en fases, entonces puede separarse en tres subproblemas, uno por cada fase  $\varphi = 1, 2, 3$ , aunque a continuación solo se mostrará de manera genérica.

Además, en el planteamiento de la función objetivo, se plantea por un lado la parte asociada a la potencia, y por otro lado la de la intensidad, de manera que la estimación de estado de la intensidad para cada fase queda:

$$\begin{aligned} \min_I J(I) = & \sum_{i=1}^{ms} w_i \left\{ (I_{ri}^m - h_{ri}(I_r))^2 + (I_{xi}^m - h_{xi}(I_x))^2 \right\} \\ & + \sum_{i=1}^{mc} w_i (I_i^m - h_{ci}(I))^2. \end{aligned} \quad (163)$$

Para determinar la solución de este problema, se considera que las funciones de las medidas del primer sumando son lineales, por ejemplo:

$$h_r(I_r) = AI_r \quad h_x(I_x) = AI_x \quad (164)$$

donde  $A$  es una matriz constante con valores no nulos de 1 ó -1.

Si se tuviera un caso especial en el que solamente existieran medidas de potencia, se tendría:

$$\begin{aligned} \frac{\partial J(I)}{\partial I_r} = 0 & \rightarrow G = A^T W I_r^m \\ \frac{\partial J(I)}{\partial I_x} = 0 & \rightarrow G = A^T W I_x^m \end{aligned} \quad (165)$$

donde  $G = A^T W A$  es la matriz de ganancia constante.

Las ecuaciones normales ( 165 ) para este caso están desacopladas en una fase además de en las partes real e imaginaria y sus soluciones producen el estado estimado

$\hat{x}^k = [\hat{I}_r^k \ \hat{I}_x^k]$  para la fase  $\varphi$ . Además, esta solución es aproximada desde la simplificación que se ha expuesto de la función objetivo ( 161 ). Para obtener la solución exacta, se debería emplear la función objetivo ( 160 ) con la tensión  $V_s$  escrita como una función de las corrientes de las ramas. Entonces la Ecuación ( 165 ) podría incluir los términos parciales extra:

$$\frac{\frac{\partial I_{rl}^m(V_s)}{\partial I}}{\frac{\partial I_{xl}^m(V_s)}{\partial I} \frac{\partial |V_s|^2}{\partial I}} \quad (166)$$

Sin embargo, estos términos son mucho más pequeños que los incluidos en la Ecuación ( 165 ), proponiendo Baran y Kelley lo que sigue:

$$\frac{\partial h_{rl}}{\partial I_{rl}} = \frac{\partial h_{xl}}{\partial I_{xl}} = 1. \quad (167)$$

Las medidas de amplitud de intensidad introducen términos de acoplamiento entre las partes real e imaginaria de las ecuaciones normales ( 165 ), y las funciones de medidas de intensidad no son lineales como se indica en ( 162 ). Por ejemplo, la medida de intensidad  $I_{l,\varphi}^m$  introduce los siguientes elementos no nulos en el Jacobiano de las medidas  $H$

$$\frac{\partial h_{cl,\varphi}^m}{\partial I_{rl,\varphi}} = \cos \Phi_{l,\varphi} \quad \frac{\partial h_{cl,\varphi}^m}{\partial I_{xl,\varphi}} = \sin \Phi_{l,\varphi} \quad (168)$$

donde  $\Phi_{l,\varphi} = \tan^{-1}(I_{xl,\varphi}/I_{rl,\varphi})$  es el ángulo de fase de la intensidad de rama.

La contribución de esta medida a la matriz de ganancia  $G$  es

$$G_l = \begin{matrix} l & b+1 \\ b+l \end{matrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \phi_{l,\varphi} & \cos \phi_{l,\varphi} \sin \phi_{l,\varphi} \\ \sin \phi_{l,\varphi} \cos \phi_{l,\varphi} & \sin^2 \phi_{l,\varphi} \end{bmatrix} \quad (169)$$

Esto hace que las ecuaciones normales sean no lineales y acopladas, de manera que la parte real e imaginaria deban resolverse juntas empleando la Ecuación ( 152 ).

Sin embargo, los autores del modelo afirman que el desacoplamiento de las fases aún se mantiene e incluso la matriz de ganancia es mucho más pequeña y dispersa que en caso basado en las tensiones de los nudos.

Para la solución de las ecuaciones normales es necesario un buen estimador de ángulos de fase para las intensidades de rama en la construcción de la matriz de ganancia  $G$ . Para conseguir esto, las medidas de intensidad se excluyen en la primera iteración (la que corresponde al perfil plano de tensión con  $\Phi_l = 0$  ) [4] y se introducen en las sucesivas iteraciones. La matriz de ganancia es reconstruida en las primeras iteraciones para garantizar la convergencia (en la versión planteada se reconstruye en las tres primeras iteraciones según se comenta en [4]).

La intensidad del problema de estimación de estado ( 163 ) se resuelve junto con la actualización de la tensión procedente del barrido hacia delante para obtener la solución del estimador. Este proceso iterativo comprende los siguientes pasos en cada iteración  $k$ :

- Paso 1: Dados los nudos de tensión  $V^{k-1}$ , se convierten las medidas de potencia a medidas equivalentes de intensidad empleando ( 158 ).
- Paso 2: Se emplean las medidas de intensidad para obtener un estimado de las intensidades de las ramas  $\hat{x}^k = [\hat{I}_r^k \ \hat{I}_x^k]$  resolviendo el problema de estimación de intensidad ( 163 ) para cada fase.
- Paso 3: Dadas las intensidades de las ramas, se actualizan las tensiones de los nudos  $V^k$  mediante el procedimiento de barrido hacia delante.
- Paso 4: Chequeo para la convergencia. Si la diferencia entre la intensidad de rama obtenida en dos iteraciones sucesivas es menor que la tolerancia de convergencia, se termina el proceso de estimación, en otro caso vuelve al paso 1.

Este modelado es computacionalmente eficiente a partir del desacoplado del problema en una fase. Además, desde que la matriz de ganancia  $G$  es independiente de los parámetros de las impedancias de las líneas, el método elimina los problemas asociados con los parámetros de las líneas en métodos basados en las tensiones de los nudos (el convencional), así como el mal condicionamiento de la matriz de ganancia.

#### 4.2.8. Estimación de estado de redes débilmente malladas

La presencia de mallas en la red no afecta a las funciones de las medidas descritas anteriormente para el caso radial. Sin embargo, cuando en el sistema hay mallas, se debe añadir la ecuación de las tensiones de las Leyes de Kirchhoff [4], quedando

$$\sum_{i \in T} \delta_i Z_i I_i = 0 \quad (170)$$

donde  $\delta_i \in \{1, -1\}$  dependiendo de la dirección de la intensidad de la rama respecto a la dirección de referencia tomada, y  $T$  es el conjunto de ramas que contiene la red de estudio.

El método que propone estos autores añade la Ecuación ( 168 ) como una restricción de igualdad a la que está sujeta la función objetivo ( 163 ).

Los resultados que se obtienen de esta metodología [4] indican que este planteamiento es más eficiente que el convencional para las redes de distribución, ya que es más rápido y requiere menos uso de memoria.

### 4.3. Estimador de estado basado en intensidades de rama (II)

#### 4.3.1. Introducción

A partir de la propuesta de un estimador de estado para redes de distribución realizada en el año 1995 por Baran y Kelley basada en las intensidades de rama, Lin, Teng y Chen, en el año 2001 [5] desarrollan la misma idea y van algo más lejos, buscando una mayor eficiencia del algoritmo de sus predecesores en esta idea.

Según Lin, Teng y Chen, el algoritmo propuesto por Baran y Kelley proporciona una matriz de Ganancia complicada para el proceso de resolución del modelo. De este modo, buscando una solución al problema comentado, desarrollan un nuevo algoritmo con una matriz de Ganancia constante y forma desacoplada.

Este método resulta eficiente, robusto y requiere poca memoria de almacenamiento.

#### 4.3.2. Modelo de estimación de estado basada en intensidades de rama

En este punto se va a hacer un breve resumen de los fundamentos que sigue el estimador basado en las intensidades de rama.

##### A) Medidas de intensidad equivalentes

Es la base de este modelo y la aproximación de los mínimos cuadrados ponderados. La función objetivo puede aproximarse a

$$J \cong w \left\{ (Re(I^{mea}(V_s)) - Re(h(B^r, B^i)))^2 + (Im(I^{mea}(V_s)) - Im(h(B^r, B^i)))^2 \right\} \quad (171)$$

donde

$B^r$  y  $B^i$ : componentes real e imaginario respectivamente de la intensidad de rama

$w$ : pesos

$I^{mea}$ : medida de intensidad equivalente

$V_s$ : tensión del nudo

$h$ : relación funcional entre  $B$  y  $V_s$ .

## B) Algoritmo WLS

B.1) las medidas de potencia incluyen inyecciones, flujos y pseudomedidas, quedando la intensidad equivalente como:

$$I^{mea-eqv} = \left[ \frac{(P + jQ)^{mea}}{V_k} \right]^* = I^r + jI^i \quad (172)$$

La matriz Jacobiana queda

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial I^r}{\partial B^r} & \frac{\partial I^r}{\partial B^i} \\ \frac{\partial I^i}{\partial B^r} & \frac{\partial I^i}{\partial B^i} \end{bmatrix}. \quad (173)$$

La ecuación iterativa de Gauss-Newton para resolver el algoritmo de mínimos cuadrados ponderados es dada por:

$$H^t R^{-1} H \Delta B = H^t R^{-1} \Delta I \quad (174)$$

donde

$$\Delta I = I^{mea-eqv} - I^{cal} = \Delta I^r + j\Delta I^i \quad (175)$$

y

$$\Delta B = \Delta B^r + j\Delta B^i \quad (176)$$

son los residuos de las medidas de intensidad equivalentes y los flujos de intensidad de las ramas respectivamente. La matriz de pesos es  $W = R^{-1}$ . Las ecuaciones normales pueden desacoplarse en las fases simples además de en sus partes real e imaginaria. La matriz de Ganancia constante  $H$  tiene valores +1 y -1 como elementos distintos de cero.

B.2) las medidas de intensidad pueden escribirse como

$$h_{km}^{cm}(B_\phi) = \sqrt{(I_{km,\phi}^r)^2 + (I_{km,\phi}^i)^2} \quad (177)$$

donde  $\phi$  es el índice de la fase. Y la contribución a la matriz de Ganancia es

$$G_{em} = \begin{bmatrix} \cos^2\phi & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (178)$$

donde  $\theta = \tan^{-1}(I_{km,\phi}^i/I_{km,\phi}^r)$ . Tener en cuenta que la linealidad se pierde al introducir la Ecuación (178).

Además,

- a) Para un sistema con medidas de magnitud de intensidad la matriz de Ganancia no es constante, luego se necesita actualizar y factorizar en cada iteración;
- b) Las partes real e imaginaria tienen que emplearse juntas (por parejas) para resolver la Ecuación (178);
- c) Para redes débilmente malladas, el modelo de estimación necesita resolver una matriz de Ganancia completamente acoplada como

$$\begin{bmatrix} G_{aa} & & & G_{za}^T \\ & G_{bb} & & G_{zb}^T \\ & & G_{cc} & G_{zc}^T \\ G_{za} & G_{zb} & G_{zc} & 0 \end{bmatrix} \quad (179)$$



donde  $G_{aa}, G_{bb}, G_{cc}$  son subganancias de las tres fases.  $G_{za}, G_{zb}, G_{zc}$  son introducidas por el uso de los multiplicadores de Lagrange para redes malladas. Las ecuaciones normales llegan a ser muy complicadas para resolver las mallas de la red.

#### C) Tensión en la i-ésima iteración

Después de que sean resueltas las intensidades de rama, se puede emplear un procedimiento de barrido hacia delante para determinar las tensiones de los nudos del circuito.

$$V_{rec}^i = V_{sen}^i - B^i Z \quad (180)$$

donde

$V_{rec}$ : tensión del nudo receptor

$V_{sen}$ : tensión del nudo emisor

$Z$ : impedancia de línea

#### 4.3.3. Mejora del algoritmo de estimación

Analizando la metodología comentada sobre la estimación basada en intensidades de rama [5], se observan una serie de problemas que se resumen en los puntos siguientes:

- De la Ecuación ( 178 ) se muestra un modelo complicado de senos y cosenos. La estructura constante de +/- 1 de la Ecuación ( 173 ) podría destruirse. Además la conversión del seno y del coseno consume mucha capacidad de computación.
- A pesar de la insensibilidad de la línea, la matriz de Ganancia es dependiente del estado y no constante. Los ángulos de fase necesitan actualizarse en cada iteración, y por otro lado el número de las iteraciones podría aumentar si se escoge el uso de una matriz de Ganancia constante aproximada.
- La propuesta de excluir las medidas de magnitud de intensidad en la primera o sucesivas iteraciones, parece no ser una buena elección debido a que puede afectar a la observabilidad del problema de estimación. El problema está en que incluir medidas de intensidad puede causar inestabilidad numérica a la hora de resolver la estimación de estado.

- La matriz Jacobiana mostrada anteriormente, tiene una estructura muy lineal por contener términos +/-1 solamente. La observación de los circuitos trifásicos muestra que la matriz Jacobiana es una estructura de 6 bloques con 2 bloques por fase (correspondientes a su parte real e imaginaria). Así la estructura podría ser desacoplada en fases, además de en sus partes real e imaginaria. Sin embargo, la estructura súper lineal que se ha mencionado, podría verse arriesgada al introducirse términos correspondientes a medidas de magnitud de intensidad.

Entonces a partir de lo comentado, los autores de este modelo establecen que:

- 1) Para redes radiales, las magnitudes de intensidad producen términos de acoplamiento mutuo entre las partes real e imaginaria. La estimación de estado basada en las intensidades de rama no será desacoplada en las partes real e imaginaria, pero sí en sus fases.
- 2) Para redes débilmente malladas, los términos de acoplamiento entre fases se producen por las mallas de la estructura. La matriz de Ganancia en este caso llega a ser una matriz acoplada completamente, como se muestra en la Ecuación ( 179 ).

Debido a la escasez de información de la fase, las magnitudes de intensidad podrían procesarse mediante la multiplicación de la magnitud con el ratio del fasor en su valor absoluto. Esto es

$$I_{km}^{mea-eqv} = |I_{km}^{mea}| \left( \frac{I_{km}^{cal}}{|I_{km}^{cal}|} \right) = I_{km}^r + jI_{km}^i \quad ( 181 )$$

#### A) Términos del Jacobiano

Teniendo

$$\frac{\partial I_{km}^r}{\partial B_{km}^r} = 1, \quad \frac{\partial I_{km}^i}{\partial B_{km}^i} = 1. \quad ( 182 )$$

quedando la matriz Jacobiana como

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ( 183 )$$

## B) Inicialización

Para la inicialización de su modelo propuesto ellos emplean

$$\mathcal{V} = 1\angle 0 \quad (184)$$

$$\mathcal{S} = P + jQ \quad (185)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{I}^* \quad (186)$$

$$\text{ang}(\mathcal{S}) = -\text{ang}(\mathcal{I}) \quad (187)$$

suponiendo que los ángulos de la tensión son cero,

$$\text{ang}(\mathcal{I}) \cong -\text{ang}(\mathcal{S}) \quad (188)$$

Los autores de este modelo plantean diversas vías y las llevan a cabo, para mejorar el modelo de estimación de Baran y Kelley, de manera que el modelo propuesto contendría lo siguiente [5]:

- 1) Desarrollo de una matriz Jacobiana constante que sea insensible a las líneas e independiente del estado. La factorización LU debería llevarse a cabo una sola vez.
- 2) Desarrollo de un desacoplado que se mantenga tanto en redes radiales como malladas. Además, desarrollan un desacoplado de fases y de las partes real e imaginaria.
- 3) El fundamento original de la estimación de estado basada en las intensidades de rama debe mantenerse, obteniendo un estimador robusto y con menos necesidad de almacenamiento en la computación.
- 4) El tratamiento de las intensidades hace que se obtenga un Jacobiano más constante.
- 5) Este modelo mejora los resultados en redes malladas.

## 4.4. Estimador de estado basado en intensidades de rama (III). Influencia de la localización de las medidas

### 4.4.1. Introducción

Wang y Schulz definen en 2004 [6] un estimador de estado para sistemas de distribución trifásicos basado en las intensidades que circulan por las ramas, empleando como método de resolución los mínimos cuadrados ponderados.

El estimador que aquí se va explicar propone como variables de estado las amplitudes y las fases de las corrientes de las ramas. Además, se emplean pseudomedidas con motivo de que el número de medidas en tiempo real pueda ser insuficiente y exista la posibilidad de que el estimador se vea limitado a la hora de la convergencia de su modelo matemático.

Además de esto, los autores analizan la importancia del emplazamiento de los aparatos de medida.

También abordan la importancia de los sistemas de lectura de medidas automáticos, conocidos como AMR en inglés (Automated Meter Reading), ya que ha aumentado su uso considerablemente en las últimas décadas. Que estos sistemas estén bien localizados en la red puede favorecer el suministro de información de importancia relacionada con el corte y la reposición de las líneas, además de las propias medidas del sistema.

#### 4.4.2. Modelo de línea empleado

Wang y Schulz emplean como modelo de línea un circuito equivalente en  $\pi$  como se muestra en la Ilustración 10 [6]. La capacidad shunt de la línea se divide en dos partes iguales, una colocada en la parte del emisor y otra en la del receptor de la línea.

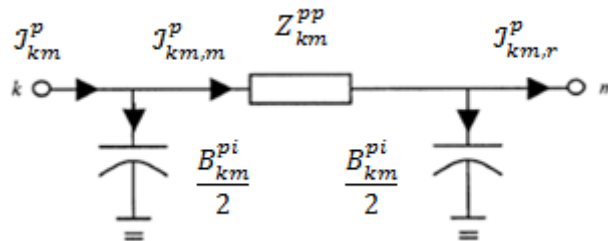


Ilustración 10. Circuito equivalente de una fase de un fragmento de línea

A continuación se van a definir las magnitudes que serán empleadas para explicar esta metodología:

$x$ : Sistema de variables de estado

$k, m, s, t$ : Nudos del sistema

$p, q$ : Diferentes fases empleadas en el análisis

$P_k^p$ : Potencia activa inyectada en el nudo  $k$  de la fase  $p$

$Q_k^p$ : Potencia reactiva inyectada en el nudo  $k$  de la fase  $p$

$P_{km}^p$ : Flujo de potencia activa del nudo  $k$  al  $m$  en la fase  $p$

$Q_{km}^p$ : Flujo de potencia reactiva del nudo  $k$  al  $m$  en la fase  $p$

$\mathcal{V}_k^p$ : Tensión compleja en la fase  $p$  del nudo  $k$ ,  $\mathcal{V}_k^p = V_k^p \angle \delta_k^p$

$\mathcal{I}_{km}^p$ : Flujo de la intensidad compleja (intensidad compleja de rama) en la fase  $p$  del nudo  $k$  al  $m$ ,  $\mathcal{I}_{km}^p = I_{km}^p \angle \alpha_{km}^p$

$Z_{km}^{pq}$ : Impedancia de rama entre las fases  $p$  y  $q$  del nudo  $k$  al  $m$ ,  $Z_{km}^{pq} = Z_{km}^{pq} \angle \theta_{km}^{pq}$

$(\mathcal{V}_k^p)^*$ : Conjugado de la tensión compleja  $\mathcal{V}_k^p$ ,  $(\mathcal{V}_k^p)^* = -V_k^p \angle \delta_k^p$

$(\mathcal{I}_{km}^p)^*$ : Conjugado de la intensidad compleja en la fase  $p$  del nudo  $k$  al  $m$

#### 4.4.3. Variables de Estado

Las variables de estado empleadas por estos autores en su algoritmo son las magnitudes y los ángulos de las fases de las intensidades que circulan por las ramas.

Cuando una línea es un poco más larga, el efecto de las capacidades shunt provoca un cambio en la corriente de la línea. Las corrientes del emisor son las que se consideran variables de estado para este modelo ( $\mathcal{I}_{km}^p = I_{km}^p \angle \alpha_{km}^p$ ). En el circuito equivalente existen tres intensidades diferentes, la del emisor (nudo  $k$ ), la del receptor (nudo  $m$ ) y la que va del nudo  $k$  al  $m$ .

#### 4.4.4. Entradas de la matriz Jacobiana

En este algoritmo se incorporan las medidas más utilizadas en los sistemas de distribución, como son la potencia activa y reactiva de las líneas, la magnitud de la intensidad de rama, las inyecciones de potencia y la amplitud de la tensión de los nudos del sistema.

Las entradas de la matriz Jacobiana  $H(x)$  son derivadas parciales de las funciones de las medidas con respecto a las variables de estado utilizadas. Los autores de este modelo de estimación se centran en plantear las entradas de la matriz  $H(x)$  para poder demostrar la linealidad del sistema.

Las medidas y las entradas de la matriz Jacobiana se definen a continuación.

##### 1) Medidas de potencia por las ramas

La potencia de la fase  $p$  del nudo  $k$  al nudo  $m$  se puede mostrar como:

$$P_{km}^p + jQ_{km}^p = \mathcal{V}_k^p (\mathcal{I}_{km}^p)^* = V_k^p I_{km}^p [\cos(\delta_k^p - \alpha_{km}^p) + j \sin(\delta_k^p - \alpha_{km}^p)] \quad (189)$$

Así, las correspondientes entradas a la matriz Jacobiana son:

- 1.1) Cuando los nudos  $km = st$  y las fases  $p = q$ , o lo que es lo mismo, que las medidas y las variables de estado están en el mismo segmento de línea resulta:

$$\frac{\partial P_{km}^p}{\partial I_{st}^q} = V_k^p \cos(\delta_k^p - \alpha_{km}^p) = \frac{P_{km}^p}{I_{km}^p} \quad (190)$$

$$\frac{\partial P_{km}^p}{\partial \alpha_{st}^q} = V_k^p I_{km}^p \sin(\delta_k^p - \alpha_{km}^p) = Q_{km}^p \quad (191)$$

$$\frac{\partial Q_{km}^p}{\partial I_{st}^q} = V_k^p \sin(\delta_k^p - \alpha_{km}^p) = \frac{Q_{km}^p}{I_{km}^p} \quad (192)$$

$$\frac{\partial Q_{km}^p}{\partial \alpha_{st}^q} = -V_k^p I_{km}^p \cos(\delta_k^p - \alpha_{km}^p) = -P_{km}^p \quad (193)$$

- 1.2) Por otro lado, cuando las medidas y las variables de estado no están en el mismo segmento de la línea, todas las entradas relacionadas a las las medidas de potencia de rama son cero.

## 2) Medidas de la amplitud de la intensidad

La intensidad de la fase  $p$  del nudo  $k$  al nudo  $m$  puede ser expresada como:

$$I_{km}^p(\text{medidas}) = I_{km}^p \quad (194)$$

Así que las entradas de la matriz Jacobiana son:

$$\frac{\partial I_{km}^p}{\partial I_{st}^q} = \begin{cases} 1 & (\text{cuando } km = st \text{ y } p = q) \\ 0 & (\text{en otro caso}) \end{cases} \quad (195)$$

$$\frac{\partial I_{km}^p}{\partial \alpha_{km}^p} = 0 \quad (196)$$

### 3) Medidas de inyección de potencia

A continuación se muestra un diagrama ilustrativo de las medidas de inyección de potencia en un nudo  $k$ .

Considérese que la inyección de potencias se encuentra en el nudo  $k$ , que hay  $n$  nudos conectados al nudo  $k$ , que hay flujos de intensidad de los nudos  $1, \dots, m$  al nudo  $k$ , y del nudo  $k$  a los nudos  $m + 1, \dots, n$  como se muestra en la siguiente Ilustración:

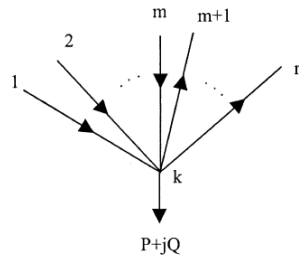


Ilustración 11. Diagrama ilustrativo sobre las medidas de inyección de potencia en un nudo  $k$

De acuerdo a la Ilustración 11 y la Ilustración 10, la inyección de potencia en el nudo  $k$  de la fase  $p$  puede expresarse como:

$$P_k^p + jQ_k^p = V_k^p \left( \sum_{i=1}^m J_{ik,r}^p - \sum_{i=m+1}^n J_{ki}^p \right)^* \quad (197)$$

De este modo, las entradas de la matriz Jacobiana se pueden dividir en tres categorías:

3.1) Cuando el segmento de la línea objeto de estudio está conectado al nudo donde se inyecta la potencia, y las variables de estado relacionadas están aguas arriba de las medidas, existen dos condiciones:

- i. Las medidas y las variables de estado están en la misma fase, quedando:

$$\frac{\partial P_k^p}{\partial I_{ik}^q} = V_k^p \cos(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (198)$$

$$\frac{\partial P_k^p}{\partial \alpha_{ik}^q} = V_k^p I_{ik}^p \text{sen}(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (199)$$

$$\frac{\partial Q_k^p}{\partial I_{ik}^q} = V_k^p \text{sen}(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (200)$$

$$\frac{\partial Q_k^p}{\partial \alpha_{ik}^q} = -V_k^p I_{ik}^p \cos(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (201)$$

- ii. Las medidas y las variables de estado no están en la misma fase: las entradas a la matriz Jacobiana son cero.

3.2) Cuando el segmento de línea en estudio está conectado al nudo al que se inyecta potencia y las variables de estado relacionadas están aguas abajo de las medidas, existen dos condiciones también:

- i. Las medidas y las variables de estado están en la misma fase:

$$\frac{\partial P_k^p}{\partial I_{ik}^q} = -V_k^p \cos(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (202)$$

$$\frac{\partial P_k^p}{\partial \alpha_{ik}^q} = -V_k^p I_{ik}^p \text{sen}(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (203)$$

$$\frac{\partial Q_k^p}{\partial I_{ik}^q} = -V_k^p \text{sen}(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (204)$$

$$\frac{\partial Q_k^p}{\partial \alpha_{ik}^q} = V_k^p I_{ik}^p \cos(\delta_k^p - \alpha_{ik}^p) \quad (205)$$

- ii. Las medidas y las variables de estado no están en la misma fase: las entradas de la matriz Jacobiana son nulas.



- 3.3) Cuando la línea no está conectada al nudo en el que se inyecta la potencia, las entradas de la matriz Jacobiana también son nulas.
- 4) Medidas de amplitud de la tensión
- Supóngase que la medida de la tensión está realizada en el nudo  $k$ , y hay  $n$  ramas  $(1, \dots, n)$  conectadas al nudo  $k(n+1)$  desde un inicio que sería el nudo 0, y todas las corrientes de las ramas están fluyendo como se muestran en la siguiente Figura:

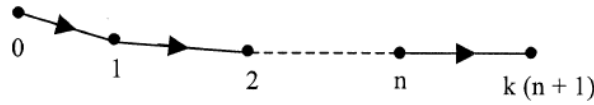


Ilustración 12. Diagrama de línea para ilustrar las magnitudes de tensión

Con la notación utilizada se podría tener la siguiente ecuación:

$$V_{n+1}^p = V_0^p - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{q=A}^C J_{(i-1),m}^q Z_{(i-1),i}^{pq} \quad (206)$$

Las entradas correspondientes de la matriz Jacobiana se dividen en las siguientes categorías:

- 4.1) Cuando el segmento de la línea de estudio está en el camino del nudo cuya amplitud de tensión está siendo medida, se pueden apreciar las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n+1}^p}{\partial I_{i-1,i}^q} = & -\cos \delta_{n+1}^p \cdot Z_{i-1,i}^{pq} \cos(\alpha_{i-1,i}^q \theta_{i-1,i}^{pq}) \\ & -\sin \delta_{n+1}^p \cdot Z_{i-1,i}^{pq} \sin(\alpha_{i-1,i}^q \theta_{i-1,i}^{pq}) \end{aligned} \quad (207)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{n+1}^p}{\partial \alpha_{i-1,i}^q} = & \cos \delta_{n+1}^p \cdot I_{i-1,i}^q Z_{i-1,i}^{pq} \sin(\alpha_{i-1,i}^q + \theta_{i-1,i}^{pq}) \\ & -\sin \delta_{n+1}^p \cdot I_{i-1,i}^q Z_{i-1,i}^{pq} \cos(\alpha_{i-1,i}^q + \theta_{i-1,i}^{pq}) \end{aligned} \quad (208)$$

- 4.2) Cuando el segmento de la línea de estudio no está en el camino del nudo cuya amplitud de tensión está siendo medida, todas las entradas relacionadas a la matriz Jacobiana son nulas.

Se puede observar que la mayoría de las entradas a la matriz Jacobiana relacionadas entre las medidas y las variables de estado de diferentes fases son nulas, excepto la medida de la amplitud de la tensión. En la teoría fueron analizadas las ecuaciones ( 207 ) y ( 208 ), y se demostró que pueden ser aproximadas a cero porque la impedancia entre las diferentes fases es muy pequeña, mucho más pequeña que la impedancia entre la misma fase [6]. Esto es:

$$\frac{\partial V_{n+1}^p}{\partial I_{i-1,i}^q} \approx 0 \text{ (Cuando } p \neq q \text{)} \quad (209)$$

$$\frac{\partial V_{n+1}^p}{\partial \alpha_{i-1,i}^q} \approx 0 \text{ (Cuando } p = q \text{)} \quad (210)$$

A partir de estas demostraciones, se pueden desacoplar las tres fases del problema.

#### 4.4.5. Método de estimación

Este algoritmo está implementado como se muestran en los siguientes pasos:

1) Inicialización.

La inicialización de la amplitud y el ángulo de fase de la intensidad tienen un elevado impacto en el aspecto de la velocidad de convergencia del algoritmo de estimación. En esta implementación, se realiza un barrido en dos pasos: (a) Se emplea un barrido hacia atrás para obtener un valor inicial de la intensidad. En este paso se obtiene el valor inicial de la tensión de cada nudo en por unidad, y utilizando la potencia inyectada en cada nudo, se determina la corriente de la rama. (b) Se emplea un barrido hacia delante para obtener un valor inicial de la tensión. En este paso, utilizando el valor de la intensidad de las ramas calculado en (a) y la tensión del nudo de partida, calcula la tensión en cada nudo.

2) Cálculo de las actualizaciones del estimador (intensidad de la rama) utilizando la siguiente expresión para las tres fases por separado:

$$\Delta x^{(n)} = [H^T(x^{(n)})R^{-1}H(x^{(n)})]^{-1} \times H^T(x^{(n)})R^{-1}[z - h(x^{(n)})] \quad (211)$$

donde:

$z$ : medidas

$h(x)$ : función de medidas

$H(x)$ : Matriz Jacobiana de la función de medidas  $h(x)$

$R$ : Matriz de covarianza de los errores de las medidas

- 3) Actualización de la intensidad de rama utilizando la expresión que se plantea a continuación y el barrido hacia delante para calcular la tensión del nudo:

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \Delta x^{(n)} \quad (212)$$

- 4) Si  $\Delta x^{(n)}$  es más pequeño que la tolerancia de convergencia (criterio de parada de las iteraciones del estimador), entonces para. Por otro lado, si el número de iteraciones es más pequeño que el máximo número de iteraciones del paso previo, entonces se vuelve al paso 2), si no, no converge.

#### 4.4.6. Influencia del emplazamiento de las medidas

En el modelo planteado, según sus autores [6], se puede demostrar que los resultados obtenidos en el estimador a partir de las medidas de potencia de rama son los mejores, seguidos de los obtenidos con medidas de intensidad y de tensión respectivamente.

Además, en el mismo estudio se demuestra que los resultados son mejores cuando las medidas de potencia e intensidad se localizan cerca de las fuentes de generación y en las líneas principales del sistema (líneas con muchos nudos aguas abajo), mientras que con medidas de tensión se obtienen mejores resultados cuanto más lejos estén los aparatos de medida de las fuentes.

### 4.5. Estimador de estado basado en intensidades de rama (IV). Introducción de PMUs

#### 4.5.1. Introducción

Este modelo de estimador del año 2013 pertenece a los investigadores Pau, Attilio y Sulis [7]. El estimador está desarrollado para usar tanto medidas no sincronizadas como sincronizadas obtenidas de las PMUs, y además, ser implementado en redes trifásicas. El modelo de estado considerado se extiende a incluir la tensión del nudo slack en el proceso de estimación, además de las intensidades de las ramas, lo que

implicaría que el conocimiento de todo el perfil de tensiones puede ser significativamente mejor.

Los autores tienen en cuenta la formulación en coordenadas polares y cartesianas para el modelo que proponen.

Los autores demuestran para distintas redes de distribución la eficacia del método propuesto, una comparación entre la exactitud y la eficiencia computacional obtenida con coordenadas polares y rectangulares, y el impacto en la seguridad de la estimación de las medidas de los sincrofasores. Este último análisis final se llevó a cabo ya que las unidades de medición fasorial (phasor measurement units, PMU) se habían extendiendo en los sistemas de transporte, pero aún se estaban probando en sistemas de distribución.

En el escenario de la evolución real, las técnicas tradicionales podrían ser insuficientes para evaluar con precisión el estado de la red debido a la amplia conexión de sistemas que pueden influir en su comportamiento. Entre estos sistemas o factores, cabe destacar, la Generación Distribuida (GD en español, o Dispersed Generation DG en inglés), los dispositivos de almacenamiento y las cargas flexibles.

La difusión de la DG podría crear dinámicas imprevistas que requieran estimaciones obtenidas de la manera más precisa posible y con un grado de actualización suficiente. En este contexto, las PMUs son muy interesantes, ya que son capaces de medir con precisión los fasores de tensión y corriente, sincronizando con el tiempo universal coordinado (UTC en inglés), la frecuencia de suministro y el ratio de cambio de frecuencia.

#### 4.5.2. Variables de estado

Pau, Attilio y Sulis proponen como variables de estado para este modelo de estimación basado en intensidades de rama la tensión del slack y las intensidades de ramas (teniendo en cuenta tanto su forma polar como cartesiana)

$$\begin{aligned} x &= [V_{slack}, \delta_{v_{slack}}, I_1 \dots I_{N_{br}}, \theta_1 \dots \theta_{N_{br}}]^T \\ &= [V_{slack}^r, V_{slack}^x, I_1^r \dots I_{N_{br}}^r, I_1^x \dots I_{N_{br}}^x]^T \end{aligned} \quad (213)$$

donde

$x$ : vector de estado considerado para este modelo, expresando las intensidades en su forma cartesiana o en su forma polar

$N_{br}$  : el número de ramas de la red

$\theta$ : Fase de la intensidad de rama

$\delta$ : Fase de la tensión del slack

#### 4.5.3. Formulación empleada

En SE, de forma general, el modelo de medición se puede representar como sigue:

$$y = h(x) + e \quad (214)$$

donde

$y = [y_1 \dots y_M]^T$ : vector de medidas de la red y pseudomedidas escogidas

$M$ : número de medidas del sistema

$h = [h_1 \dots h_M]^T$ : vector no lineal de las funciones asociadas a las medidas

$e$ : vector de ruido de las medidas que se considera compuesto por variables Gaussianas independientes de cero, con matriz de covarianza  $\Sigma_y = \text{diag}\{\sigma_{y1}^2 \dots \sigma_{yM}^2\}$ .

Las medidas pueden ser tensiones, intensidades, flujos o inyecciones de potencia activa y reactiva. Las medidas tienen una baja desviación estándar  $\sigma$ , mientras que los valores a priori (pseudomedidas) son asignados con una alta desviación estándar para resaltar la confianza inferior dado que tales cantidades (escasa precisión, debido a que ésta se basa en datos no medidos en tiempo real, sino que provienen de datos históricos).

De esta manera, la estimación de estado propuesta posee un proceso iterativo que se puede englobar en tres pasos [7]:

##### 1) Definición/carga de las medidas y los residuos

En el primer paso, se calculan los residuos de las medidas. Para la primera iteración, cuando las estimaciones no están disponibles, es necesaria una inicialización para las variables de estado. Se toma el perfil plano como valor inicial de las tensiones, mientras que para las corrientes se considera que además de las tensiones de los nudos, también existen inyecciones de potencia, de manera que:

$$\mathcal{V} = 1 \angle 0 \quad (215)$$

$$\mathcal{S} = P + jQ \quad (216)$$

$$\mathcal{S} = \mathcal{J}^* \quad (217)$$

$$\text{ang}(\mathcal{S}) = -\text{ang}(\mathcal{J}) \quad (218)$$

suponiendo que los ángulos de la tensión son cero,

$$\text{ang}(\mathcal{J}) \cong -\text{ang}(\mathcal{S}) \quad (219)$$

Si se emplean medidas equivalentes, tienen que ser calculadas antes de calcular los residuos. En particular, las medidas de potencia dependen las tensiones en los nudos y del flujo de las corrientes.

- 2) Estimación de las corrientes por las ramas aplicando mínimos cuadrados ponderados (WLS)

El paso de WLS se lleva a cabo minimizando la suma ponderada de los cuadrados de los residuos. En cada iteración, el estado de la variación de las variables  $\Delta x = x_n - x_{n-1}$  se calcula a partir de los residuos de las medidas, mediante la resolución de las siguientes ecuaciones:

$$H^T W H \Delta x = H^T W (y - h(x_{n-1})) \quad (220)$$

donde  $H$  es el Jacobiano de las funciones de las medidas y  $W$  es la matriz de pesos escogida normalmente de la inversa de  $\sum y$ .  $H^T W H$  es la matriz de Ganancia.

- 3) Cálculo de las tensiones de la red a través de un barrido hacia delante desde el nudo slack

Por último, el cálculo de las tensiones para cada nudo basado en un análisis sencillo de la caída de las tensiones a través de las líneas, dadas las corrientes de las ramas estimadas en el WLS.

En la metodología BC-DSSE (Branch Current Distribution Systems State Estimator), estos autores se basan además, en el modelo de medidas simplificado por la definición de medidas equivalentes.

De este modo, los elementos de la matriz Jacobiana quedan como:

En coordenadas cartesianas las medidas de potencia se expresan como intensidades equivalentes

$$J_{eq} = \frac{(P + jQ)^*}{V^*} = I_{eq}^r + jI_{eq}^x \quad (221)$$

donde  $P$  y  $Q$  son las potencias activa y reactiva respectivamente, y  $V$  la tensión estimada en cada iteración. Las medidas de intensidad equivalentes, que pueden representar flujos por las ramas o inyecciones, son tratadas como medidas fasoriales de intensidad y los elementos no nulos de la matriz Jacobiana son +1 ó -1, cuando la intensidad de rama contribuye a las medidas dadas.

Las medidas de la amplitud de la intensidad en la rama  $j$  contribuyen a la matriz Jacobiana como sigue:

$$\frac{\partial I_j}{\partial I_j^r} = \cos(\theta_j) \quad \frac{\partial I_j}{\partial I_j^x} = \sin(\theta_j). \quad (222)$$

Cuando se emplean las coordenadas polares, los flujos de potencia de la rama  $j$  (medidos en el nudo  $h$ ) se expresan como

$$P_j = V_h I_j \cos(\delta_{vh} - \theta_j), \quad Q_j = V_h I_j \sin(\delta_{vh} - \theta_j). \quad (223)$$

De esta manera, los términos del Jacobiano que corresponden a la potencia activa y reactiva son:

$$\frac{\partial P_j}{\partial I_j} = V_h \cos(\delta_{vh} - \theta_j), \quad \frac{\partial P_j}{\partial \theta_j} = -V_h I_j \sin(\delta_{vh} - \theta_j) \quad (224)$$

$$\frac{\partial Q_j}{\partial I_j} = V_h \sin(\delta_{vh} - \theta_j), \quad \frac{\partial Q_j}{\partial \theta_j} = V_h I_j \cos(\delta_{vh} - \theta_j). \quad (225)$$

Las medidas de inyección de potencia generan términos análogos para cada rama conectada al nudo dado (sólo difieren en los signos).

#### 4.5.4. Fundamentos de esta metodología

Con esta metodología lo que se pretende es realizar una estimación completa de corrientes por las ramas en redes de distribución, aportando además una estimación

segura para el caso de redes activas, donde la calidad de las estimaciones puede verse influenciada por la generación del sistema.

El procedimiento está diseñado para usar medidas en tiempo real y todas las pseudomedidas disponibles. Además, se añade la tensión del slack al estado de las corrientes por las ramas para determinar el conocimiento de la tensión de la red de estudio, ya que esta información es fundamental porque cada tensión influye en todo el perfil de tensiones y puede verse afectado por un imprevisto. Si el valor de la tensión de la red de estudio no es correcto, todas las estimaciones se ven afectadas, y en particular, la estimación del estado de la tensión que proviene del barrido hacia delante de la estimación de las corrientes.

El que se añadan variables nuevas al vector de estado, impacta sobre el Jacobiano  $H$  obtenido de las derivadas de las funciones de medidas  $h(x)$  con respecto al vector de estado.

Para esta metodología, como se ha mencionado anteriormente, se han considerado las coordenadas rectangulares y polares para la descripción del estado.

A continuación se va a exponer una serie de análisis que los autores de esta metodología llevaron a cabo teniendo en cuenta escenarios con y sin PMUs, y si la red era débilmente mallada.

#### A. No hay PMU disponibles en la red.

Cuando la medida de la fase no está disponible, los ángulos de fase de la red tienen que ser considerados como diferencias de fases con una referencia común. Esto es que el nudo slack es comúnmente escogido como el nudo de referencia y solo la amplitud de su tensión puede incluirse en el estado estimado.

Si se considera el vector de estado en coordenadas rectangulares

$$x = [V_{slack}^r, V_{slack}^x, I_1^r \dots I_{N_{br}}^r, I_1^x \dots I_{N_{br}}^x]^T \quad (226)$$

En cada iteración  $n$  se tiene

$$\begin{aligned} v_h &= \left| v_{slack} - \sum_{j \in \Gamma_h} Z_j J_j \right| \simeq \\ &\simeq \text{Re} \left[ v_{slack} e^{-j\delta_{v_h}^{(n-1)}} - \sum_{j \in \Gamma_h} Z_j J_j e^{-j\delta_{v_h}^{(n-1)}} \right] = \\ &= V_{slack} \cos \delta_{v_h}^{(n-1)} - \sum_{j \in \Gamma_h} (R_j I_j^r - X_j I_j^x) \cos(\delta_{v_h}^{(n-1)}) - \end{aligned} \quad (227)$$



$$- \sum_{j \in \Gamma_h} (X_j I_j^r - R_j I_j^x) \text{sen}(\delta_{v_h}^{(n-1)})$$

donde  $\delta_{v_h}^{(n-1)}$  es el ángulo de fase la tensión de referencia en el paso correspondiente a la iteración anterior,  $Z_j = R_j + jX_j$  es la impedancia de rama,  $I_j$  la corriente de la rama  $j$ , y  $\Gamma_h$  es el conjunto de ramas que comprende el camino desde el nudo de referencia.

Al emplear el vector de estado algunos de los términos de la matriz Jacobiana quedan como sigue:

$$\frac{\partial V_h}{\partial V_{slack}} = \cos \delta_{V_h}. \quad (228)$$

Así la fila correspondiente al elemento de la tensión quedaría:

$$V_h \rightarrow \left[ \cos \delta_{V_h} \dots \quad \frac{\partial V_h}{\partial I_j^r} \quad \frac{\partial V_h}{\partial I_j^x} \dots \right] \quad (229)$$

donde para una rama  $j$  contenida en el camino  $\Gamma_h$ :

$$\frac{\partial V_h}{\partial I_j^r} = -R_j \cos(\delta_{v_h}) - X_j \text{sen}(\delta_{v_h}) \quad (230)$$

$$\frac{\partial V_h}{\partial I_j^x} = X_j \cos(\delta_{v_h}) - R_j \text{sen}(\delta_{v_h}). \quad (231)$$

Cuando se emplea las coordenadas polares, las ecuaciones anteriores se puede expresar de la siguiente forma:

$$V_h \simeq V_{slack} \cos(\delta_{v_h}) - \sum_{j \in \Gamma_h} Z_j I_j \cos(\beta_{zj} + \alpha_j - \delta_{v_h})$$

Donde  $Z_j$  es la impedancia de rama y  $\beta_{zj}$  es su fase.

Así la fila correspondiente a la tensión en la matriz Jacobiana sería

$$V_h \rightarrow \left[ \cos \delta_{V_h} \dots \quad \frac{\partial V_h}{\partial I_j} \quad \frac{\partial V_h}{\partial \alpha_j} \dots \right]$$

$$\frac{\partial V_h}{\partial I_j} = -Z_j \cos(\beta_{zj} + \alpha_j - \delta_{v_h}^{(n-1)})$$

$$\frac{\partial V_h}{\partial \alpha_j} = +Z_j I_j \cos(\beta_{zj} + \alpha_j - \delta_{v_h}^{(n-1)})$$

Está claro que las medidas de tensión añaden términos no constantes en el Jacobiano, y de hecho, la solución del término de WLS requiere una nueva factorización de la matriz de ganancia en cada iteración.

#### B. Al menos una PMU en la red

Cuando al menos una PMU está disponible, es posible estimar todos los ángulos de fase con respecto a la UTC de referencia.

Considérese el análisis con coordenadas cartesianas, así como el vector de estado incluyendo variables reales e imaginarias de la Ecuación ( 226 ).

El nudo slack ya no representa la referencia para los ángulos de fase y se incluye en el estado únicamente para mejorar la fiabilidad de la estimación.

En el caso de medias de tensión tradicionales, los nuevos términos del Jacobiano son los siguientes:

$$\frac{\partial V_h}{\partial V_{slack}^r} = \cos(\delta_{V_h}) \quad ( 232 )$$

$$\frac{\partial V_h}{\partial V_{slack}^x} = \sin(\delta_{V_h}) \quad ( 233 )$$

De estos términos queda claro que la magnitud de tensión impacta tanto en la parte real como imaginaria de la tensión del slack.

En caso de que la medida fasorial sea realizada por la PMU, ambas, tensiones e intensidades medidas pueden ser expresadas en su parte real e imaginaria. Entonces para cada medida sincronizada se deben añadir dos filas a  $H$ .

Para medidas sincronizadas de tensión el nudo  $h$  por ejemplo, las filas añadidas al Jacobiano son las siguientes:

$$\begin{matrix} V_h^r \rightarrow \\ V_h^x \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V_h^r}{\partial V_{slack}^r} & \frac{\partial V_h^r}{\partial V_{slack}^x} & \cdots & \frac{\partial V_h^r}{\partial I_j^r} & \frac{\partial V_h^r}{\partial I_j^x} & \cdots \\ \frac{\partial V_h^x}{\partial V_{slack}^r} & \frac{\partial V_h^x}{\partial V_{slack}^x} & \cdots & \frac{\partial V_h^x}{\partial I_j^r} & \frac{\partial V_h^x}{\partial I_j^x} & \cdots \end{bmatrix} \quad (234)$$

con  $j=1, \dots, N_{br}$ .

Los términos anteriores quedan como:

$$\frac{\partial V_h^r}{\partial V_{slack}^r} = 1 \quad \frac{\partial V_h^r}{\partial V_{slack}^x} = 0 \quad (235)$$

$$\frac{\partial V_h^x}{\partial V_{slack}^r} = 0 \quad \frac{\partial V_h^x}{\partial V_{slack}^x} = 1 \quad (236)$$

$$\frac{\partial V_h^r}{\partial I_j^r} = -R_j \quad \frac{\partial V_h^r}{\partial I_j^x} = X_j \quad (237)$$

$$\frac{\partial V_h^x}{\partial I_j^r} = -X_j \quad \frac{\partial V_h^x}{\partial I_j^x} = -R_j. \quad (238)$$

Las cuatro últimas ecuaciones son nulas cuando  $j$  es la rama que parte del nudo slack.

Viendo las ecuaciones resultantes, se concluye que los términos del Jacobiano son constantes en este caso y, por tanto, se mantienen así durante las iteraciones del algoritmo, dando lugar a una computación más rápida.

La precisión de las PMUs está dada en términos de magnitud y ángulo de fase con  $\sigma_{v_h}^2$  y  $\sigma_{\delta_{v_h}}^2$  las covarianzas de las medidas de amplitud y fase de la tensión respectivamente.

Los pesos obtenidos en el procedimiento de WLS en las PMUs se obtienen de la inversa de la matriz de covarianzas.

Para el caso de las medidas sincronizadas de intensidad en la rama  $h$ , las filas añadidas a la matriz Jacobiana serían:

$$\begin{matrix} I_h^r \rightarrow \\ I_h^x \rightarrow \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial I_h^r}{\partial V_{slack}^r} & \frac{\partial I_h^r}{\partial V_{slack}^x} & \cdots & \frac{\partial I_h^r}{\partial I_j^r} & \frac{\partial I_h^r}{\partial I_j^x} & \cdots \\ \frac{\partial I_h^x}{\partial V_{slack}^r} & \frac{\partial I_h^x}{\partial V_{slack}^x} & \cdots & \frac{\partial I_h^x}{\partial I_j^r} & \frac{\partial I_h^x}{\partial I_j^x} & \cdots \end{bmatrix} \quad (239)$$

Quedando como términos del Jacobiano:

$$\frac{\partial I_h^r}{\partial V_{slack}^r} = 0 \quad \frac{\partial I_h^r}{\partial V_{slack}^x} = 0 \quad (240)$$

$$\frac{\partial I_h^x}{\partial V_{slack}^r} = 0 \quad \frac{\partial I_h^x}{\partial V_{slack}^x} = 0 \quad (241)$$

$$\frac{\partial I_h^r}{\partial I_j^r} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } j = h \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (242)$$

$$\frac{\partial I_h^x}{\partial I_j^x} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } j = h \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (243)$$

Cabe destacar que para el caso de las medidas de las corrientes en cartesianas los términos del Jacobiano vuelven a ser constantes, pero en el caso de la formulación polar no lo son.

Cuando las corrientes por las ramas son expresadas en forma polar, no es posible encontrar términos constantes en el Jacobiano, incluso para medidas de unidades sincronizadas de tensión, lo contrario a lo que ocurre cuando el estado se encuentra en coordenadas rectangulares.

A continuación se muestra la no linealidad de las ecuaciones en caso de emplear el modelo de coordenadas polares para este caso:

$$\frac{\partial V_h}{\partial V_{slack}} = \cos(\delta_{v_{slack}} - \delta_{v_h}) \quad \frac{\partial V_h}{\partial \alpha_{slack}} = -\sin(\delta_{v_{slack}} - \delta_{v_h}) \quad (244)$$

$$\frac{\partial V_h^r}{\partial V_{slack}} = \cos(\delta_{v_{slack}}) \quad \frac{\partial V_h^r}{\partial \delta_{v_{slack}}} = -V_{slack} \sin(\delta_{v_{slack}}) \quad (245)$$

$$\frac{\partial V_h^x}{\partial V_{slack}} = \text{sen}(\delta_{v_{slack}}) \quad \frac{\partial V_h^x}{\partial \delta_{v_{slack}}} = V_{slack} \cos(\delta_{v_{slack}}) \quad (246)$$

$$\frac{\partial V_h}{\partial V_{slack}} = \cos(\delta_{v_{slack}} - \delta_{v_h}) \quad (247)$$

$$\frac{\partial V_h}{\partial \delta_{v_{slack}}} = -V_{slack} \text{sen}(\delta_{v_{slack}} - \delta_{v_h}) \quad (248)$$

$$\frac{\partial \delta_{v_h}}{\partial V_{slack}} = 0 \quad (249)$$

$$\frac{\partial \delta_{v_h}}{\partial \delta_{v_{slack}}} = 1 + \sum_{j \in \Gamma_h} \frac{Z_j I_j}{V_h} \cos(\beta_{z_j} + \alpha_j - \delta_{v_{slack}}) \quad (250)$$

Todo lo anterior demuestra que las medidas sincronizadas pueden impactar significativamente en la exactitud de las estimaciones, en particular para redes con generación distribuida.

#### C. Redes débilmente malladas

Las redes de distribución, como se conoce, pueden presentar mallas pequeñas. Esas mallas añaden restricciones por la correspondiente Ley de Kirchhoff de las tensiones:

$$\sum_{j \in \Lambda} \lambda_j Z_j \mathcal{I}_j \quad (251)$$

Donde  $\Lambda$  es el conjunto de ramas de la malla y,  $Z_j$  e  $\mathcal{I}_j$  son la impedancia y el fasor de la corriente de la rama  $j$ -ésima.  $\lambda_j$  puede ser +1 ó -1 dependiendo de la referencia de la dirección de la malla respecto de la dirección  $j$  de la rama.

En esta metodología, las inyecciones nulas son tratadas como medidas virtuales de alto peso en WLS. Este enfoque permite mantener una baja dimensión del sistema de ecuaciones.

#### 4.5.5. Pruebas y resultados realizados en la teoría estudiada

A continuación se va a explicar de manera resumida las conclusiones a las que se llega una vez se estudian algunos ejemplos:

En la primera serie de pruebas, para destacar mejor el rendimiento del estimador, se considera la red sin presencia de generación distribuida.

Destacar que la presencia de las medidas de tensión en la estimación es relevante. El estado polar es más eficiente que el estado en cartesianas ya que el tratamiento de la amplitud de la intensidad llega a ser lineal, sin embargo, el tiempo de ejecución promedio se ve afectado por los términos más pesados del Jacobiano correspondientes a la inyección de pseudomedidas. Por otro lado, empleando la forma rectangular, el algoritmo de la estimación en presencia de las medidas sincronizadas tiene un coste computacional reducido debido a que la matriz del Jacobiano está diseñada para ser constante.

Por lo comentado antes, resulta de mayor interés el formato del estimador en cartesianas.

El impacto de la DG es evidente. El porcentaje de error cuadrático medio en la estimación con presencia de pseudomedidas aumenta. Ante el caso de que no se tengan pseudomedidas, este problema puede ser parcialmente afrontado usando más medidas de intensidad por las ramas o simultáneamente, medidas de flujo de potencia activa y reactiva.

En el caso de la red trifásica, las ecuaciones se amplían calculando las correspondientes a otras fases. Las impedancias mutuas determinarían los acoplamientos entre las diferentes fases para el caso de que se usen tanto medidas no sincronizadas como sincronizadas. Este estimador permite obtener una versión desacoplada del paso correspondiente al WLS pasando por alto las impedancias mutuas ya que son de un valor considerablemente inferior a las propias. Entonces, en este paso, el estado de cada fase puede ser considerado por separado, y el WLS puede ser desarrollado por la solución de tres sistemas de ecuaciones más pequeños.

Cabe destacar en este caso, que el estimador completamente acoplado da mayor exactitud en los resultados de la estimación, pero que el desacoplado obtiene menores tiempos de ejecución, ya que este modelado es más rápido.

## **4.6. Estimador de estado lineal**

### **4.6.1. Introducción**

En este apartado se presenta un modelo de estimador lineal propuesto en 2013 por Daniel A. Haughton y Thomas Heydt para topologías de red trifásicas y monofásicas, donde se admiten casos desequilibrados [8]. Lo que pretenden con esta metodología es conseguir un proceso lineal no iterativo, con bajo coste computacional, en el que las operaciones sean directas.

#### 4.6.2. Formulación lineal

Para la formulación de este modelo, las medidas se recogen en el vector  $z'$ , y se relacionan con el estado del sistema  $x$  a través del vector de funciones de las medidas  $h$  como sigue

$$h(x) = z' + \eta \quad (252)$$

donde  $\eta$  es un vector de términos de ruido (error). El vector de medidas incorpora ruido y se reescribe como:

$$z = z' + \eta. \quad (253)$$

Se propone linealizar  $h(x)$  sobre un punto de operación esperado, obteniendo

$$hx = z \quad (254)$$

donde la notación  $hx$  indica la relación lineal entre la matriz del proceso y el vector de estado. Tener en cuenta que  $x$  y  $z$  son vectores mientras que  $h$  es una matriz. La Ecuación (254) es la base del estimador propuesto.

La estimación es el resultado de la minimización de la norma Euclídea del vector

$$r = z - hx. \quad (255)$$

Siguiendo las ecuaciones, la función objetivo se escribe como

$$J(x) = \sum_{k=1}^n (z_k - h_k(x))^2 = r'r \quad (256)$$

donde  $k$  es una medida arbitraria y  $n$  es el número de medidas. El mínimo de  $J(x)$  se encuentra cuando

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x} = \frac{\partial [\sum_{k=1}^n (z_k - h_k(x))^2]}{\partial x} = \frac{\partial r'r}{\partial x} = 0. \quad (257)$$

Tener en cuenta que el escalar  $J(x)$  es la suma de los cuadrados de los residuos para cada medida. El estimado se encuentra cuando

$$\hat{x} = [h^t h]^{-1} h^t z = h^+ z \quad (258)$$

Donde  $h^+$  se refiere a la pseudoinversa de la matriz  $h$ , es decir, el producto de  $(h^t h)^{-1} h^t$ .

Los pesos se obtienen en esta metodología con la inversa de las varianzas, teniendo en cuenta que los datos con bajas varianzas tendrán elevados pesos. De esta manera la (258) queda como sigue:

$$\hat{x} = [h^t W h]^{-1} h^t W z. \quad (259)$$

Si se tiene en cuenta que la función de las medidas es lineal obtenida mediante la linealización anterior, el proceso de resolución puede obtenerse mediante cálculo directo.

#### 4.6.3. Formulación lineal trifásica

El diseño básico del estimador es no iterativo, puramente real, linealizado y con el detalle completo de las fases.

En la formulación que se muestra a continuación, los datos se representan en complejos (en cartesianas y polares). Las tensiones trifásicas desequilibradas y las medidas de intensidad se visualizan con las medidas del flujo de potencia activa y reactiva de alguna rama. Así, la Ecuación (255) se reescribe como sigue

$$r_r + jr_i = (z_r + jz_i) - (h_r + jh_i)(x_r + jx_i) \quad (260)$$

donde  $r$  hace referencia a la parte real e  $i$  a la parte imaginaria.

El vector de residuos puede ser separado en parte real e imaginaria como se muestra a continuación

$$\begin{bmatrix} r_r \\ r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_r - h_r x_r + h_i x_i \\ z_i h_r - x_i - h_i x_r \end{bmatrix} \quad (261)$$

Operando y empleando el cálculo de la normal queda

$$r^H r = (z_r - h_r x_r + h_i x_i)^2 + (z_i h_r - x_i - h_i x_r)^2 \quad (262)$$



donde  $(\cdot)^H$  hace referencia a la operación hermitiana la cual es una trasposición seguida de una conjugación compleja. Además se tiene

$$\frac{\partial}{\partial x_r} r^H r = 0 \quad \frac{\partial}{\partial x_i} r^H r = 0 \quad (263)$$

Tener en cuenta que  $x_r$  y  $x_i$  son variables independientes. Dada una tensión del vector de estado para una red de distribución, podría resultar práctico asumir que las desviaciones de las fases de las tensiones de los nudos son pequeñas para pequeños cambios en el sistema.

El vector de residuos podría separarse en parte real e imaginaria como se muestra

$$\begin{bmatrix} h_r & -h_i \\ h_i & h_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix} \quad (264)$$

Entonces, el estimador se resuelve para el estado estimado

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_r \\ \hat{x}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_r & -h_i \\ h_i & h_r \end{bmatrix}^+ \begin{bmatrix} z_r \\ z_i \end{bmatrix} \quad (265)$$

Las ecuaciones del estimador lineal se desarrollan como:

$$h = \begin{bmatrix} [Y_{BUS}] \\ [U] \\ [h_{LM}] \end{bmatrix}, \quad medidas = \begin{bmatrix} [V_{meas}] \\ [I_{meas}] \\ [I_{line}] \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = [\hat{V}] \quad (266)$$

donde

$U$ : matriz identidad

$h_{LM}$ : matriz de coeficientes de medida de línea

$Y_{BUS}$ : modelo de admitancia del sistema

$V_{meas}, I_{meas}$ : Vectores de medidas en coordenadas cartesianas

$I_{line}$ : cargas e inyecciones de medidas y supuestos.

#### 4.7. Estimador de estado basado en el uso de una matriz de impedancia cuasi simétrica reducida.

Esta metodología, conocida bajo las siglas de TRX-DSSE en inglés, fue formulada por De Oliveira y Rojas Quintana en 2015 [9]. El modelo propuesto está planteado para aplicarse sobre redes radiales de distribución a gran escala ya que implementa la eliminación de los nudos de interconexión o nudos de paso (nudos virtuales), donde la inyección de potencias es nula. Como resultado, el tamaño del problema de optimización se ve reducido de acuerdo a obtener las tensiones y los ángulos de las cargas y generadores.

Cabe destacar de este método, que sus autores realizan varias hipótesis y simplificaciones del mismo a lo largo de su artículo que no están claramente justificadas.

Como ya se conoce, la estimación se fundamenta en la resolución de un problema de optimización tal que

$$\min f(x) \text{ s.t. } g(x) = 0, \quad c(x) \geq 0 \quad (267)$$

$$\min f(x) = \frac{1}{2} [z - h(x)]^T W [z - h(x)] \quad (268)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m W_i \cdot r_i^2 \quad (269)$$

$$\text{s.t. } g_i(x) = z_i - h_i - r_i = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad (270)$$

donde  $r_i = z_i - h_i(x)$  es el residuo de una medida  $i$ ,  $m$  es el número de medidas y  $h_i(x)$  son los valores de las funciones de las medidas calculadas. Estas medidas pueden ser tensiones de los nudos, flujos de potencia, o inyecciones de potencia de la red. De hecho el valor de la potencia calculado en la red viene dado por:

$$h_i^p(x) = V_i \sum_{k=1}^n V_k [G_{ik} \cos \theta_{ik} + B_{ik} \sin \theta_{ik}] \quad (271)$$

$$h_i^0(x) = V_i \sum_{k=1}^n V_K [G_{ik} \text{sen} \theta_{ik} - B_{ik} \text{cos} \theta_{ik}] \quad (272)$$

Esta formulación se plantea como una alternativa a la metodología WLS (método más empleado hasta el momento), basada en la reducción de la diferencia de las tensiones estimadas con respecto a las del origen, es decir, se fundamenta en la caída de tensión. La ecuación de la diferencia de tensión se define como:

$$x - x_0 = TRX \cdot I(x) \quad (273)$$

donde  $x$  es el conjunto de tensiones de los nudos,  $x_0$  corresponde a las tensiones en el origen (nudo de partida), e  $I$  es el conjunto de inyecciones de intensidad en los nudos de la red.

Las tensiones del sistema se obtienen a partir de las funciones de las potencias que se extraen de las Leyes de Kirchhoff a través de una matriz de impedancia reducida, y clave de este apartado, conocida como matriz  $TRX$ . Esta matriz presenta una estructura cuasi-simétrica, tomándose como ventaja principal en la representación de redes radiales a gran escala donde se incluyen expresamente todos los nudos del sistema.

#### 4.7.1. Formulación completa

En esta formulación las derivadas de las funciones de medidas no son funciones explícitas como función de las entradas de la matriz  $TRX$ , así que el incremento de las tensiones estimadas con respecto a las del origen, junto con las medidas, deberían expresarse como restricciones en el problema de optimización, quedando la formulación del problema como sigue:

$$\min f(x) = \frac{1}{2} [\Psi - \Phi(x, x_0)]^T W [\Psi - \Phi(x, x_0)] \quad (274)$$

donde  $\Psi$  es el conjunto de medidas  $\psi_i$  y  $\Phi$  es el conjunto de medidas estimadas.

Así,

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m_\psi} W_i r_i^2 \quad (275)$$

$$s.t. \ g_0(x) = x - x_0 - [TRX]I(x) = 0 \quad (276)$$

$$g_i = r_i - \psi_i + \phi_i = 0 \quad i = 1, \dots, z_\psi \quad (277)$$

#### 4.7.2. Variables de estado

El objetivo es estimar el estado del sistema que minimice el ruido de las medidas. Como variables de estado del sistema para esta metodología se toma las tensiones de los nudos, con su parte real e imaginaria, quedando:

$$x = [\mathcal{V}_k] = V_{xk} + jV_{yk} = V_k \angle \theta_k, \text{ con } k = 1, \dots, n \text{ nudos} \quad (278)$$

y la tensión del nudo 0 sería  $x_0 = [\mathcal{V}_0]$ , donde

$$[\mathcal{V}_0] = V_{x0} + jV_{y0} = V_0 \angle \theta_0. \quad (279)$$

Sobre todo, el error viene dado por la diferencia existente entre el conjunto de las variables de medidas  $\psi_i \in \Psi$  y el conjunto de las variables de las funciones de medidas calculadas  $\phi_i \in \Phi(x, x_0)$ .

Por otro lado, las medidas virtuales de este método se consideran como tales a partir de inyecciones de potencia activa y reactiva nulas, también conocidos esos nudos como nudos de interconexión o nudos de paso (nudos virtuales).

Como en otras topologías, los pesos deberían ser identificados para cada medida. El número de variables de estado viene dado por los nudos de tensión existentes en la red  $n_v$ , y el número de medidas es  $m$ .

El número total de observaciones es  $m = m_\psi + m_t$ , donde  $m_\psi$  y  $m_t$  corresponden al número de medidas virtuales y al número de medidas reales. Se debe cumplir que  $m > n_v$ . El número de grados de libertad para esta formulación es de  $d_f = m - n_v$ .

En redes monofásicas, tomando la secuencia positiva como referencia para el análisis, el sistema tiene  $n_v = 2n + 1$  variables de estado, considerando el ángulo del origen como la referencia. El número de medidas directas es  $m_\psi$  y el número de medidas virtuales de los nudos de interconexión es  $m_t = 2(n - n_l)$ . Como resultado,  $m = m_\psi + 2(n - n_l)$ . Si los residuos  $r_i$  están incluidos en este modelo como restricciones, el número de restricciones viene dado por  $n_c = 2n + m_\psi$ . Por otro lado, si los cálculos de los residuos están directamente incluidos en la función objetivo, el número de restricciones está fijado en  $n_c = 2n$ .

Alternativamente en las redes trifásicas de distribución, el número de variables de estado es de  $n_v = 6n + 3$  considerando como conocidos el valor de la tensión en el nudo de referencia. El número de medidas virtuales sería de  $m_t = 6(n - n_l)$ .

Para el caso monofásico en los sistemas de distribución,  $n_v$  debería ser determinado de acuerdo a la estructura de la red. En este caso, los residuos son incluidos en el modelo  $n_c = 6n + m_\psi$ ; siendo en otro caso  $n_c = 6n$ .

#### 4.7.3. Organización de los datos

##### 1) Topología T y estructura de la matriz TRX.

Para un sistema de distribución radial con  $n$  nudos y  $n$  ramas, la formulación propuesta exige que todas las ramas y los nudos estén ordenados como se indica en la imagen siguiente:

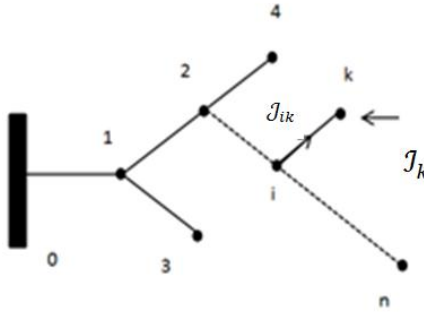


Ilustración 13. Estructura general de red de distribución radial

El nudo slack o nudo de origen, siendo el 0 en el ejemplo, no es considerado parte de la red de distribución. Con respecto a esta forma de numerar la red de estudio, existe una relación entre el conjunto de inyecciones de intensidad  $I$  y el conjunto de intensidades de ramas  $J$  que da lugar, a partir de las Leyes de Kirchhoff, a una matriz triangular superior  $T$ :  $J = -T \cdot I$ .

Como ya se ha indicado antes, el modelo de la estructura de la red y la topología pueden ser dados tanto en monofásico como en trifásico para el enfoque de esta topología. La estructura de la matriz TRX sería la que se muestra a continuación:

$$TRX = \begin{bmatrix} T^T R T & -T^T X T \\ T^T X T & T^T R T \end{bmatrix} \quad (280)$$

donde  $R$  y  $X$  serían los parámetros correspondientes a las impedancias series de las ramas y  $T$  sería la matriz de conectividad de topología triangular.

Las dimensiones de la matriz TRX son de  $2n \times 2n$  en monofásica y  $6n \times 6n$  en trifásica, donde  $n$  es el número de nudos.

## 2) Pesos, medidas y pseudomedidas.

Para explicar esta metodología, se va a definir al conjunto de medidas como  $\Psi$ . Como medidas directas se tienen dos tipos. En primer lugar, las tensiones de los nudos y las intensidades de las ramas. Los pesos de las medidas se determinan a partir de la inversa de las varianzas de las mismas. En segundo lugar, las inyecciones de potencia tanto activa como reactiva se podrían obtener de los datos o rescatarlas como pseudomedidas cuyos valores vienen dados a partir de los históricos o valores estáticos a partir de curvas características de carga.

### 4.7.4. Cálculo de las restricciones

De acuerdo a calcular las ecuaciones que determinan la diferencia de tensión del sistema se define

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \end{bmatrix} + TRX \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix} \quad (281)$$

donde  $I_x$  e  $I_y$  se expresan como

$$I_{xk} = i_k(V_{xk}, V_{yk}, P_k, Q_k) = \frac{P_k V_{xk} + Q_k V_{yk}}{(V_{xk})^2 + (V_{yk})^2} \quad (282)$$

$$I_{yk} = i_k(V_{xk}, V_{yk}, P_k, Q_k) = \frac{-Q_k V_{xk} + P_k V_{yk}}{(V_{xk})^2 + (V_{yk})^2} \quad (283)$$

De acuerdo a la Ecuación ( 274 ), los valores de las medidas calculadas deben compararse con las reales, como se comentó al principio. El error total debe ser calculado teniendo en cuenta la inversa de las varianzas de las medidas, que por definición resultaría ser una matriz diagonal de pesos  $W$ , donde  $r_i = \psi_i - \phi_i$ .

Si como medidas se tienen las tensiones, las intensidades por las ramas y las inyecciones de potencia, como ya se ha mencionado, las funciones de las medidas serían:

## 1) Tensiones de los nudos

$$V_k = \sqrt{V_{xk}^2 + V_{yk}^2}, \quad k = 0, \dots, n. \quad (284)$$

2) Intensidades por las ramas

$$J_{ik} = \sqrt{J_{xik}^2 + J_{yik}^2}, \quad \forall ik \quad (285)$$

donde la parte real e imaginaria de dichas intensidades viene dada por  $J_x = -T \cdot I_x$  e  $J_y = -T \cdot I_y$  respectivamente.

3) Inyecciones de potencia

Se comparan los valores calculados con los datos respectivamente. Las inyecciones calculadas se obtienen directamente del conjunto de las tensiones del sistema.

#### 4.7.5. Reducción de la red: de $TRX$ a $TRX_r$

Si el nudo  $k$  es de interconexión (virtual), no existen potencias activa ni reactiva inyectadas. En este caso la matriz de impedancia  $TRX$  por eliminación correspondiente a sus filas y columnas respectivas a ese nudo  $k$ , se puede reducir a  $TRX_r$ . Como resultado se tiene que el tamaño del problema se ve reducido considerablemente y la Ecuación (276) será reemplazada por la Ecuación (286).

Además, si se trata del caso monofásico con  $n$  nudos, donde  $n_l$  son nudos de carga o de generación, la dimensión de  $TRX_r$  pasa de  $2n \times 2n$  a  $2n_l \times 2n_l$ .

$$x_r - x_{r0} - TRX_r \cdot I_r(x) = 0 \quad (286)$$

donde  $x_r$  es el conjunto de tensiones de las cargas y nudos de generación,  $x_{r0}$  corresponde a las tensiones del origen, e  $I_r$  es el conjunto de corrientes inyectadas en las cargas o nudos de generación. Las tensiones del sistema son función de las potencias inyectadas, y se pueden determinar a partir de las Leyes de Kirchhoff a través de la matriz de impedancia reducida  $TRX_r$ .

Después de la reducción empleada, se determina un flujo de cargas para determinar el estado de los nudos que han sido eliminados en la reducción.

#### 4.7.6. Formulación del estimador para sistemas débilmente mallados

Esta formulación está preparada para ser aplicada a sistemas débilmente mallados. En este caso, la matriz TRX y la ecuación de la diferencia de tensiones dada en la Ecuación ( 276 ) deberían modificarse para poder incluir las ecuaciones adicionales correspondientes a la existencia de mallas en la red.

Se define

$$Z_{mesh} = T_{mesh} \cdot Z_p \quad ( 287 )$$

donde  $Z_{mesh}$  es matriz de impedancia general medida,  $T_{mesh}$  es la matriz triangular superior de conectividad de las medidas y  $Z_p$  es la impedancia modificada. Entonces, la ecuación de la caída de tensiones queda como sigue:

$$\begin{bmatrix} \Delta V \\ 0 \end{bmatrix} = Z_{mesh} \begin{bmatrix} I \\ J_k \end{bmatrix} \quad ( 288 )$$

estando  $Z_{mesh}$  estructurada como se indica:

$$Z_{mesh} = \begin{bmatrix} H & -M^T \\ M & N \end{bmatrix}. \quad ( 289 )$$

Aplicando la reducción de Kron a  $Z_{mesh}$ , la ecuación de las tensiones modificada para este caso puede expresarse como

$$\Delta V_{mesh} = Z_{mesh}^{kron} \cdot I_{mesh} \quad ( 290 )$$

donde:  $Z_{mesh}^{kron} = H - M^T N^{-1} M$ .

Todas las entradas a las ecuaciones que se han mostrado anteriormente corresponden a matrices y vectores con números complejos. De acuerdo a aplicar el modelo TRX para sistemas de distribución, las ecuaciones deberían expresarse en valores reales.

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{x0} \\ V_{y0} \end{bmatrix} + TRX_{mesh} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \end{bmatrix} \quad ( 291 )$$

quedando  $TRX_{mesh}$  como una matriz cuasi-simétrica



$$TRX_{mesh} = \begin{bmatrix} A_{mesh} & -B_{mesh} \\ B_{mesh} & A_{mesh} \end{bmatrix} \quad (292)$$

donde  $A_{mesh} = Re\{Z_{mesh}^{kron}\}$  y  $B_{mesh} = Im\{Z_{mesh}^{kron}\}$ .

Finalmente, con vistas a incluir redes con numerosas medidas en este modelo, (276) debería ser sustituida por la siguiente expresión:

$$x_{mesh} - x_{mesh0} - TRX_{mesh} \cdot I_{mesh}(x) = 0. \quad (293)$$

Destacar que con esta metodología al reducir el modelo de optimización, se reduce los tiempos de computación, lo cual resulta muy interesante a futuro para redes de distribución, ya que en estas redes la dimensión del problema aumenta, de manera que si se puede reducir la ejecución del proceso de optimización, se puede alcanzar un importante ahorro computacional.

Por otro lado, como se comentó al principio, con esta metodología se pueden tratar tanto redes radiales como redes débilmente malladas.

# **CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES**

## 5. Conclusiones

Desde el desarrollo inicial del concepto de Estimación de Estado en la década de 1970, la problemática se ha convertido en una parte crítica de la operación y gestión de los sistemas eléctricos en todo el mundo. Como se mencionó al principio de este documento, hasta hace poco el tema de la Estimación de Estado en redes de distribución estaba totalmente paralizado, pues no había ni interés ni medios para abarcar este tema en profundidad. Además de esto, cabe decir que las redes de distribución se han diseñado y operado como sistemas pasivos, donde los flujos de energía son unidireccionales y relativamente fáciles de predecir. Sin embargo, las redes de distribución están viendo cada vez mayores penetraciones de los recursos energéticos distribuidos de manera que el problema ha ido captando la atención de numerosos investigadores.

El objetivo de este documento era tratar la evolución de este problema desde que surgió su interés hasta el momento y mostrar las topologías más relevantes de estimadores de estado, evaluando así las diferentes metodologías aplicadas para su resolución (tratando las convencionales también empleadas en la estimación en redes de transporte y otras más novedosas aplicadas para optimizar el proceso de optimización).

En la primera parte de este proyecto, se ha mostrado un análisis en profundidad de la formulación general del estimador de estado y sus características más relevantes. Para ello, se ha partido de la base de la estimación de estado en redes de transporte, ya que el fundamento global es el mismo para ambos planteamientos. No obstante, como se dijo al principio de este documento, las diferencias existentes son tan amplias que no es posible trasladar fundamentos y modelos de transporte a distribución.

Aunque los estudios sobre esta temática aún son escuetos y bastante escasos en cuanto a contenidos que presenten novedades o diferencias con respecto a otros más longevos en el tiempo, se ha podido establecer un análisis que aporta las características generales y relevantes que se precisan para alcanzar un conocimiento más en detalle sobre lo que implica la estimación en redes que son cada vez más complejas, y donde están presentes los desequilibrios, como son las de distribución.

Además, en este documento, la atención se ha centrado no solo en analizar los principios de la estimación de estado en sí, sino también, otro objetivo ha sido el buscar novedades en la algoritmia que proporcionaran avances, ventajas de unos modelos frente a otros, de unos sistemas frente a otros de manera que se abrieran futuras líneas de investigación que proporcionen avances y mejoras con respecto a lo ya existente.

De manera global, estableciendo un análisis resumido de este documento y en base a la teoría que ha sido analizada para llevarlo a cabo, destacar que pese a que existen numerosos métodos de resolución de la estimación, en casi todos los modelos se emplean los mismos. Así, se ha podido corroborar que la mayoría de los modelos propuestos emplean las técnicas de mínimos cuadrados ponderados y la de ecuaciones normales con restricciones.

En base al planteamiento realizado, teniendo en cuenta que se trata de una red con múltiples medidas (muchas de ellas tomadas con aparatos diferentes) de las cuales cada una posee cierta distorsión y, que lógicamente no es la misma para todas ellas, muchos modelos se apoyan en la estimación basada en WLS. Destacar que está muy bien considerada debido a sus ventajosas características estadísticas y a la facilidad de su implementación computacional.

Sin embargo, esa metodología puede producir mal condicionamiento de la matriz de Ganancia, con lo que se recurre a otras metodologías, como por ejemplo, las ecuaciones normales con restricciones.

A partir de estos modelos presentados, se ha dejado abierta la puerta a analizar otras vías en la estimación de estado. Así, paralelamente a este Proyecto, se ha realizado otro cuya base está en la investigación de una nueva metodología que proporcione avances en el proceso de optimización, planteándose el problema desde otra perspectiva [12].

Este nuevo planteamiento consiste en emplear modelos eléctricos más lineales para determinar la estimación de estado en redes de distribución equilibradas. Lo que se trata es de utilizar un vector de estado mejor para las medidas que se encuentran disponibles en las redes de distribución. Este nuevo modelo puede aplicarse sobre redes radiales y débilmente malladas de media/baja tensión.

## Referencias Bibliográficas

- [1] *Análisis y operación de sistemas de energía eléctrica*. Antonio Gómez Expósito.
- [2] *Estimación de estado y parámetros*. Pedro Zarco y Antonio Gómez Expósito.
- [3] *State estimation for distribution systems with zero-injection constraints*. W.-M. Lin and J.-H. Teng, *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 11, no. 1, pp. 518-524, Feb. 1996.
- [4] *A branch-current-based state estimation method for distribution systems*. M. E. Baran and A.W. Kelley, *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 10, pp. 483–491, Feb. 1995.
- [5] *A highly efficient algorithm in treating current measurements for the branch-current-based distribution state estimation*. Lin W-M, Teng J-H, Chen S.J: *IEEE Trans. on Power Del.* Vol. 16(3), 433-439 (2001).
- [6] *A Revised Branch Current-Based Distribution System State Estimation Algorithm and Meter Placement Impact*. Haibin Wang, Student Member, IEEE, and Noel N. Schulz, Senior Member, IEEE. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, VOL. 19, NO. 1, FEBRUARY 2004.
- [7] *Efficient Branch-Current-Based Distribution System State Estimation Including Synchronized Measurements*. *IEEE TRANSACTIONS ON INSTRUMENTATION AND MEASUREMENT*, VOL. 62, NO. 9, SEPTEMBER 2013. Marco Pau, Paolo Attilio Pegoraro, Member, IEEE, and Sara Sulis, Member, IEEE.
- [8] *A Linear State Estimation Formulation for Smart Distribution Systems*. Daniel A. Haughton, Student Member, IEEE, and Gerald Thomas Heydt, Life Fellow, IEEE. *IEEE TRANSACTIONS ON POWER SYSTEMS*, VOL. 28, NO. 2, MAY 2013
- [9] *Distribution System State Estimation Model Using a Reduced Quasi-Symmetric Impedance Matrix*. P.M. De Oliveira-De Jesus, Senior Member, IEEE, and Andrés A. Rojas Quintana. *IEEE Trans. Power Syst.*, vol. 30, no. 6, 2015.
- [10] *Power System State Estimation: Theory and Implementation*. A. Abur and A. Gómez Expósito. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [11] *State Estimator for Real-Time Monitoring of Distribution Systems*. M. E. Baran and A.W. Kelley. *IEEE PES 1994 Winter Meeting paper No 94 WM 235-2 PWRS*.
- [12] *Estimador de estado nodal aumentado*. M<sup>a</sup> Angeles Gámiz Juárez, 2016.